

Нормированные объемы гиперболических узлов и многогранников

Лекция 1: Объемы гиперболических 3-многообразий

А.Ю. Веснин

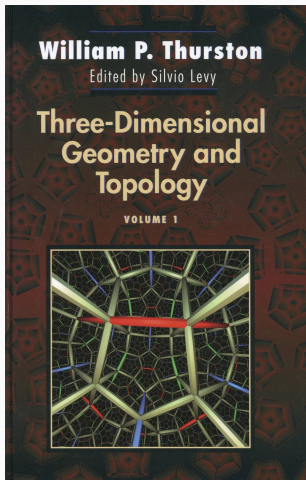
ИМ СО РАН, ТГУ, НГУ

Школа "Торическая топология, гиперболическая геометрия и комбинаторная теория групп"
ФТ "Сириус", 17-21 мая 2026 г.

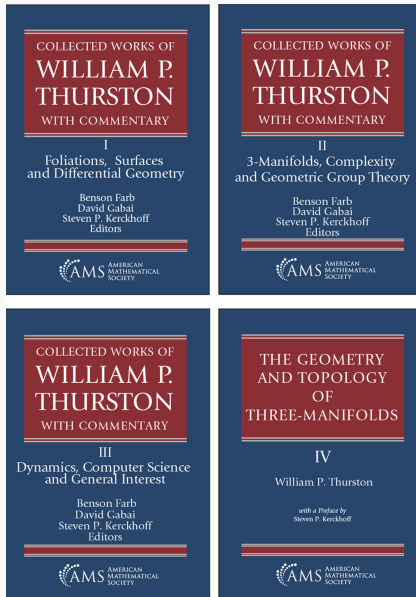
К 80-летию со дня рождения Уильяма Тёрстона



William Paul Thurston (30.10.1946 – 21.08.2012)



Собрание сочинений Уильяма Тёрстона с комментариями



"We must admit with humility that, while number is purely a product of our minds, space has a reality outside our minds, so that we cannot completely prescribe its properties a priori."

"Мы должны смиренно признать, что, хотя число является чисто продуктом нашего ума, пространство имеет реальность вне нашего ума, так что мы не можем полностью предписать его свойства априори."

Из письма Гаусса к Бесселю, 1833 г.

<https://mathshistory.st-andrews.ac.uk/Biographies/Gauss/quotations>

J. Milnor, *Hyperbolic geometry: the first 150 years*, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), 9–24.

1. Трехмерные гиперболические многообразия
2. Наименьшие замкнутые многообразия
3. Наименьшие некомпактные многообразия
4. Замкнутые многообразия, соответствующие предельным ординалам
5. Открытые вопросы

Трёхмерные гиперболические многообразия

Проблема классификации пространственных форм

Пространственной формой называют связное полное риманово многообразие постоянной секционной кривизны k .

Пространственная форма называется сферической, евклидовой или гиперболической если соответственно $k > 0$, $k = 0$ или $k < 0$.

Киллинг [1891]: проблема классификации пространственных форм Клиффорда – Клейна.¹

Клейн²: "В гиперболическом случае ответ на вопрос о пространственных формах не так прост, как в случаях евклидовой и эллиптической геометрии."

"В отношении гиперболической геометрии мы только подчеркнем, что замкнутая трехмерная гиперболическая пространственная форма с конечной мерой объема до сих пор по видимому еще не найдена."

¹ Дж. Вольф, Пространства постоянной кривизны, русский перевод: Москва, 1982. Послесловие о гиперболическом случае написал Ю. Д. Бураго.

² Ф. Клейн, Неевклидова геометрия, Берлин, 1928, русский перевод: Москва, 1936.

Вычисление длин и площадей на плоскости \mathbb{H}^2

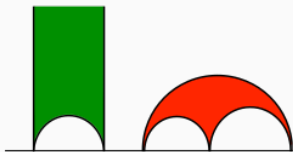
Модель гиперболической геометрии в верхней полуплоскости:

$$\mathbb{H}^2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y > 0\} \quad \text{и} \quad ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2}{y^2}$$

Обозначим $\bar{\mathbb{H}}^2 = \mathbb{H}^2 \cup \partial\mathbb{H}^2$.

Треугольник $T(\alpha, \beta, \gamma)$ с углами α, β, γ лежит в $\bar{\mathbb{H}}^2$ тогда и только тогда, когда $0 \leq \alpha + \beta + \gamma < \pi$.

Треугольник T называется **идеальным**, если $\alpha = \beta = \gamma = 0$.



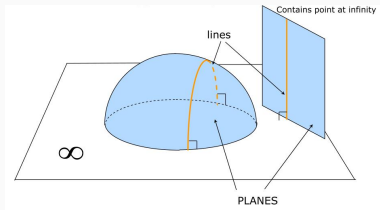
Площадь гиперболического (в том числе, идеального) треугольника

$$\text{area}(T(\alpha, \beta, \gamma)) = \pi - \alpha - \beta - \gamma \leq \pi.$$

Гиперболическое пространство \mathbb{H}^3

Модель 3-мерной гиперболической геометрии в верхнем полупространстве

$$\mathbb{H}^3 = \{(x, y, t) \in \mathbb{R}^3 \mid t > 0\}, \quad ds^2 = \frac{dx^2 + dy^2 + dt^2}{t^2}.$$



- **Геодезические** – полупрямые и полуокружности, ортогональные $\{t = 0\}$;
- **Гиперплоскости** – евклидовы полуплоскости и полусферы, ортогональные $\{t = 0\}$;
- **Отражения** в гиперплоскостях являются изометриями пространства \mathbb{H}^3 ;
- Каждая **изометрия** \mathbb{H}^3 – произведение (не более четырех) отражений;
- $d\text{vol} = \frac{dx dy dt}{t^3}$.

Группы изометрий и гиперболические многообразия

Абсолютом пространства Лобачевского называют $\partial\mathbb{H}^3 = \bar{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$.

Представляя точку $(x, y, t) \in \mathbb{H}^3$ как кватернион

$$x + y \cdot i + t \cdot j + 0 \cdot k = z + tj,$$

продолжим действие $z \mapsto \frac{az + b}{cz + d}$ с $\partial\mathbb{H}^3 = \bar{\mathbb{C}}$ на $\mathbb{H}^3 \cup \partial\mathbb{H}^3$ по правилу

$$z + tj \mapsto (a(z + tj) + b) \cdot (c(z + tj) + d)^{-1},$$

где $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ такие, что $\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = 1$.

Группа сохраняющих ориентацию изометрий $\text{Isom}^+(\mathbb{H}^3) \cong \text{PSL}(2, \mathbb{C})$.

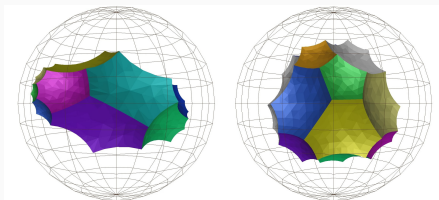
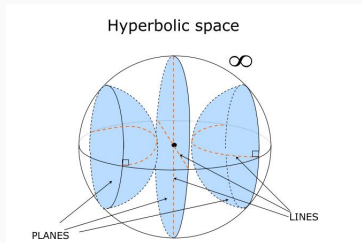
Трехмерное многообразие $M^3 = \mathbb{H}^3/\Gamma$, где Γ – дискретная группа изометрий пространства Лобачевского \mathbb{H}^3 , действующая без неподвижных точек, будем называть гиперболическим.

Модель геометрии Лобачевского в шаре

Модель пространства Лобачевского в шаре.

$$B^3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : \sum_{i=1}^3 x_i^2 < 1\}, \quad ds^2 = \frac{4 \sum_i dx_i^2}{(1 - \sum_{i=1}^3 x_i^2)^2}.$$

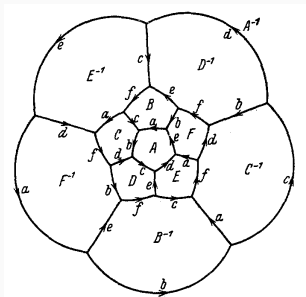
Lines and planes in the disk model of \mathbb{H}^3 :



Два 26-гранника с двугранными углами $\frac{\pi}{2}$ в \mathbb{H}^3 .

Первые примеры: многообразие Вебера–Зейферта (1933)

Пусть $D \subset \mathbb{H}^3$ – додекаэдр с двугранными углами $2\pi/5$, а группа Γ порождена изометриями, которые попарно отождествляют грани D .



Теорема. [Зейферт, Трельфалль].
Комплекс, получающийся путем попарного отождествления сторон многогранника, является многообразием тогда и только тогда, когда его характеристика равна нулю.

$$\chi(\mathbb{H}^3/\Gamma) = 1 - \frac{30}{5} + \frac{12}{2} - 1 = 0.$$

Многообразие \mathbb{H}^3/Γ – додекаэдральное гиперболическое пространство³.

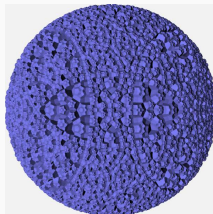
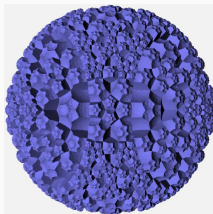
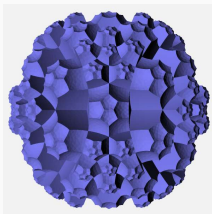
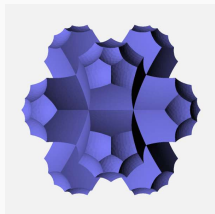
Из D можно построить 8 замкнутых ориентируемых многообразий.⁴

³ C. Weber, H. Seifert, *Die beiden Dodekaederräume*, *Mathematische Zeitschrift* 37:1 (1933), 237–253.

⁴ B. Everitt, *3-manifolds from Platonic solids*, *Topology and its Appl.* 138 (2004), 253–263.

Первые примеры: многообразии Лёбелля (1931)

Прямоугольный додекаэдр в \mathbb{H}^3 . Пусть G – группа, порожденная **отражениями** в его гранях. Как найти подгруппу, действующую в \mathbb{H}^3 без неподвижных точек?

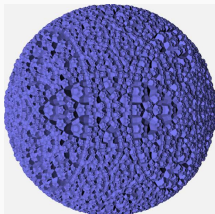
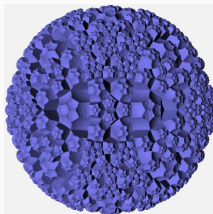
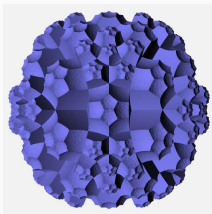
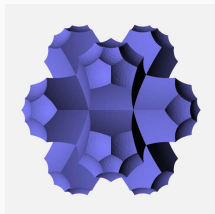


Löbell (1931): многообразие из 8 экземпляров прямоугольного 14-гранника.

Веснин (1987): задается раскраской граней в 4 цвета. Метод работает для произвольного ограниченного прямоугольного многогранника. Аналогично можно строить неориентируемые многообразия.

Первые примеры: многообразии Лёбелля (1931)

Прямоугольный додекаэдр в \mathbb{H}^3 . Пусть G – группа, порожденная **отражениями** в его гранях. Как найти подгруппу, действующую в \mathbb{H}^3 без неподвижных точек?



Löbell (1931): многообразии из 8 экземпляров прямоугольного 14-гранника.

Веснин (1987): задается раскраской граней в 4 цвета. Метод работает для произвольного ограниченного прямоугольного многогранника. Аналогично можно строить неориентируемые многообразия.

Почему объемы?

Теорема жёсткости Мостова – Прасада. Пусть M_1, M_2 – связные ориентируемые полные гиперболические 3-многообразия конечного объема. $\pi_1(M_1) \cong \pi_1(M_2)$ тогда и только тогда, когда M_1 изометрично M_2 . Следовательно, объём является топологическим инвариантом многообразия.

Сопоставим каждому связному полному гиперболическому трехмерному многообразию M его объём $\text{vol}(M) \in \mathbb{R}$.

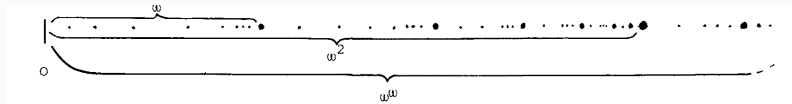
Почему объемы?

Теорема жёсткости Мостова – Прасада. Пусть M_1, M_2 – связные ориентируемые полные гиперболические 3-многообразия конечного объема. $\pi_1(M_1) \cong \pi_1(M_2)$ тогда и только тогда, когда M_1 изометрично M_2 . Следовательно, объём является топологическим инвариантом многообразия.

Сопоставим каждому связному полному гиперболическому трехмерному многообразию M его объём $\text{vol}(M) \in \mathbb{R}$.

Как устроено множество объёмов многообразий? (1)

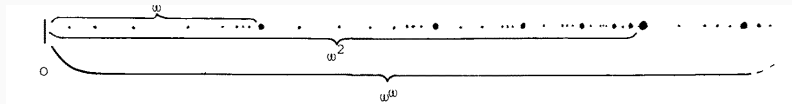
Теорема [Тёрстон, 1977-78]. Пусть \mathcal{H} – множество всех гиперболических 3-многообразий конечного объёма. Значения функции $\text{vol} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ образуют замкнутое недискретное подмножество в \mathbb{R} порядкового типа ω^ω . Число многообразий заданного объёма конечно.



То есть существует многообразие наименьшего объёма v_1 ; затем идёт объём v_2 , и так далее. Последовательность объёмов $v_1 < v_2 < v_3 < \dots$ имеет предельную точку v_ω . Точка v_ω соответствует наименьшему объёму среди полных некомпактных многообразий. Следующий объём полного некомпактного многообразия равен $v_{2\omega}$. Точка v_{ω^2} является предельной для последовательности $v_\omega, v_{2\omega}, \dots$ и соответствует наименьшему многообразию с двумя каспами, и так далее.

Как устроено множество объёмов многообразий? (1)

Теорема [Тёрстон, 1977-78]. Пусть \mathcal{H} – множество всех гиперболических 3-многообразий конечного объёма. Значения функции $\text{vol} : \mathcal{H} \rightarrow \mathbb{R}$ образуют замкнутое недискретное подмножество в \mathbb{R} порядкового типа ω^ω . Число многообразий заданного объёма конечно.



То есть существует многообразие наименьшего объёма v_1 ; затем идёт объём v_2 , и так далее. Последовательность объёмов $v_1 < v_2 < v_3 < \dots$ имеет предельную точку v_ω . Точка v_ω соответствует наименьшему объёму среди полных некомпактных многообразий. Следующий объём полного некомпактного многообразия равен $v_{2\omega}$. Точка v_{ω^2} является предельной для последовательности $v_\omega, v_{2\omega}, \dots$ и соответствует наименьшему многообразию с двумя каспами, и так далее.

Как устроено множество объёмов многообразий? (2)

Второе утверждение теоремы Тёрстона означает, что для каждого $v = v_j$, $j = 1, 2, \dots, v_\omega, \dots$ число $N(v)$ различных многообразий M с объёмом $\text{vol}(M) = v$ конечно.

Проблема.⁵

- Является ли функция $N(v_j)$ локально ограниченной?
- Может ли отношение чисел v_i/v_j быть иррациональным?

Проблема.⁶

Покажите, что объёмы гиперболических 3-многообразий не все являются рационально зависимыми.

⁵ М. Gromov, *Hyperbolic manifolds according to Thurston and Jorgensen*, Seminare N. Bourbaki 546 (1979-1980), 40–53.

⁶ W. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Lecture Notes from Princeton University, 1977-78.

Как устроено множество объёмов многообразий? (2)

Второе утверждение теоремы Тёрстона означает, что для каждого $v = v_j$, $j = 1, 2, \dots, v_\omega, \dots$ число $N(v)$ различных многообразий M с объёмом $\text{vol}(M) = v$ конечно.

Проблема.⁵

- Является ли функция $N(v_j)$ локально ограниченной?
- Может ли отношение чисел v_i/v_j быть иррациональным?

Проблема.⁶

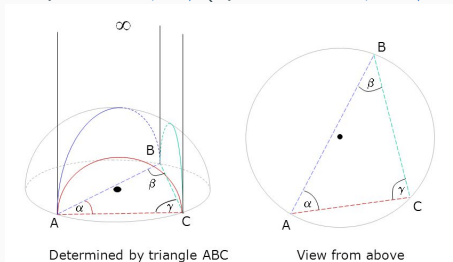
Покажите, что объёмы гиперболических 3-многообразий не все являются рационально зависимыми.

⁵ M. Gromov, *Hyperbolic manifolds according to Thurston and Jorgensen*, Seminare N. Bourbaki 546 (1979-1980), 40–53.

⁶ W. Thurston, *The geometry and topology of 3-manifolds*, Lecture Notes from Princeton University, 1977-78.

Объём идеального тетраэдра

Пусть $T(\alpha, \beta, \gamma)$ – тетраэдр в \mathbb{H}^3 все вершины которого принадлежат $\partial\mathbb{H}^3$ и двухгранные углы равны α, β, γ (при этом $\alpha + \beta + \gamma = \pi$):



Теорема.⁷ Имеет место формула

$$\text{vol}(T(\alpha, \beta, \gamma)) = \Lambda(\alpha) + \Lambda(\beta) + \Lambda(\gamma).$$

Мак объём $V_{tet} = \text{vol}(T(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})) = 3\Lambda(\frac{\pi}{3}) = 1.014941606409653 \dots$

⁷J. Milnor, Hyperbolic geometry: the first 150 years, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), 9–24.

Функция Лобачевского

В формуле для объёма использована функция Лобачевского.

$$\Lambda(\theta) = - \int_0^{\theta} \log |2 \sin(t)| dt.$$

Для нее выполнены следующие соотношения:

$$\Lambda(\pi + \theta) = \Lambda(\theta), \quad \Lambda(-\theta) = -\Lambda(\theta),$$

$$\Lambda(n\theta) = \sum_{k \bmod n} n \Lambda\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right).$$

Гипотеза.⁸ Рассмотрим только такие углы θ , которые являются рациональными множителями π . Тогда любое \mathbb{Q} -линейное уравнение

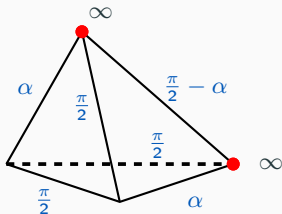
$$q_1 \Lambda(\theta_1) + \cdots + q_n \Lambda(\theta_n) = 0$$

является следствием указанных соотношений.

⁸ J. Milnor, Hyperbolic geometry: the first 150 years, Bull. Amer. Math. Soc. 6 (1982), 9–24.

Функция Лобачевского как объём

Пусть $T(\alpha) \subset \overline{\mathbb{H}^3}$ – тетраэдр с двугранными углами α , $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{2} - \alpha$ как на рисунке. Две его вершины являются конечными (сумма углов $> \pi$), а другие две вершины – идеальными (сумма углов $= \pi$).



Лемма. Имеет место равенство $\text{vol}(T(\alpha)) = \frac{1}{2}\Lambda(\alpha)$.

Доказательство: прямым интегрированием используя то, что

$$d\text{vol} = \frac{dx dy dt}{t^3}.$$

Вариационный подход к вычислению объемов

Теорема.⁹ [Вариационная формула Шлефли]

Пусть P_t – гладкое семейство компактных многогранников в \mathbb{S}^3 , \mathbb{E}^3 или \mathbb{H}^3 . Тогда

$$k \cdot d \operatorname{vol}(P_t) = \frac{1}{2} \sum_e \ell(e) d\theta(e),$$

где k – кривизна пространства. Суммирование ведется по всем ребрам e , а $\theta(e)$ – двугранный угол при ребре e .

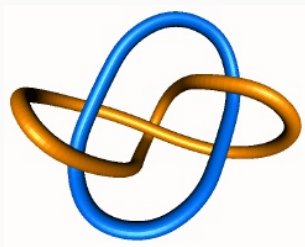
Ludwig Schläfli (1814 – 1895) доказал теорему для тетраэдра в \mathbb{S}^3 .

⁹ Э.Б. Винберг, Объемы неевклидовых многогранников, Успехи матем. наук 48:2 (1993), 17–46.

Наименьшие замкнутые многообразия

10 маленьких замкнутых многообразий

Десять наименьших по объёму замкнутых ориентируемых 3-многообразий найдены с помощью компьютерной программы *SnapPea*.¹⁰



¹⁰C. D. Hodgson, J. R. Weeks, *Symmetries, isometries and length spectra of closed hyperbolic 3-manifolds*, *Experiment. Math.* 3 (1994), 101–113.

10 маленьких замкнутых многообразий

Веснин и Медных ¹¹: они получаются хирургиями на зацеплении Уайтхеда.

многообразие	объём	гомологии
$\mathcal{M}_1 = \mathcal{W}(5, -2; 5, -1)$	0.94270736278 ...	$\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$
$\mathcal{M}_2 = \mathcal{W}(1, 1; 5, -1)$	0.98136882889 ...	\mathbb{Z}_5
$\mathcal{M}_3 = \mathcal{W}(3, -2; 6, -1)$	1.0149416064 ...	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_6$
$\mathcal{M}_4 = \mathcal{W}(5, -1; 5, -1)$	1.26370923866 ...	$\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}_5$
$\mathcal{M}_5 = \mathcal{W}(1, 1; 6, -1)$	1.2844853005 ...	\mathbb{Z}_6
$\mathcal{M}_6 = \mathcal{W}(1, 1; 1, -2)$	1.39850888415 ...	0
$\mathcal{M}_7 = \mathcal{W}(1, -2; 6, -1)$	1.41406104417 ...	\mathbb{Z}_6
$\mathcal{M}_8 = \mathcal{W}(2, 1; 5, -1)$	1.41406104417 ...	\mathbb{Z}_{10}
$\mathcal{M}_9 = \mathcal{W}(7, -3; 5, -1)$	1.42361190029 ...	\mathbb{Z}_{35}
$\mathcal{M}_{10} = \mathcal{W}(1, 1; 3, -2)$	1.44069900673 ...	\mathbb{Z}_3

¹¹А. Mednykh, A. Vesnin, *Covering properties of small volume hyperbolic 3-manifolds*, J. Knot Theory Ram. 7:3 (1998), 381–392.

Минимальное замкнутое ориентируемое многообразие

Многообразии \mathcal{M}_1 и его объём компьютерным перебором независимо нашли Матвеев и Фоменко¹² и Weeks¹³.

Теорема.¹⁴ Многообразии Вика – Матвеева – Фоменко \mathcal{M}_1 является единственным наименьшим по объёму замкнутым гиперболическим 3-многообразием. В частности, $v_1 = 0,9427\dots$

Веснин и Медных¹⁵ описали действие группы $\text{Isom}(\mathcal{M}_1) = \mathbb{D}_{12}$ на \mathcal{M}_1 .

Также, известно, что \mathcal{M}_1 является наименьшим среди арифметических многообразий.

¹²S. Matveev, A. Fomenko, *Isoenergetic surfaces of Hamiltonian systems, the enumeration of three-dimensional manifolds in order of growth of their complexity, and the calculation of the volumes of closed hyperbolic 3-manifolds*, Russian Math. Surveys 43 (1988), 3–24.

¹³J. Weeks, *Hyperbolic structures on 3-manifolds*, Princeton Univ. Ph.D. Thesis, 1985.

¹⁴D. Gabai, R. Meyerhoff, P. Milley, *Mom technology and hyperbolic 3-manifolds*, Comment. Math. Helv. 86 (2011), no. 1, pp. 145–188.

¹⁵A. Mednykh, A. Vesnin, *Visualization of the isometry group action on the Fomenko–Matveev–Weeks manifold*, Journal of Lie Theory 8 (1998), 51–66.

Первая тройка замкнутых ориентируемых многообразий

Недавно было доказано, что многообразия \mathcal{M}_1 , \mathcal{M}_2 и \mathcal{M}_3 действительно являются минимальными и единственными.

Теорема.¹⁶ Замкнутыми ориентируемыми гиперболическими 3-многообразиями с объёмом не более 1.01749 являются:

- многообразиие \mathcal{M}_1 с объёмом 0.94271...
- многообразиие \mathcal{M}_2 с объёмом 0.98137...
- многообразиие \mathcal{M}_3 объёмом 1.01499...

Объём \mathcal{M}_3 был вычислен¹⁷ с точностью до 10^{-50} . Авторы высказали гипотезу, что он в точности равен $3\Lambda\left(\frac{\pi}{3}\right)$.

Доказано¹⁸, что эта гипотеза верна.

¹⁶D. Gabai, R. Haraway, R. Meyerhoff, N. Thurston, A. Yarmola, *Hyperbolic 3-manifolds of low cusp volume*, <https://arxiv.org/abs/2109.14570>

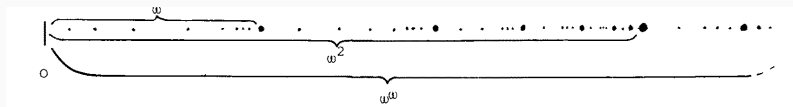
¹⁷R. Meyerhoff, W. D. Neumann, *An asymptotic formula for the eta invariants of hyperbolic 3-manifolds*, *Comment. Math. Helv.* 67 (1992), 28–46

¹⁸А. Веснин, А. Медных, *Многообразия Фибоначчи как двулистные накрытия трехмерной сферы и гипотеза Мейергофа — Ноймана*, *Сиб. матем. журн.* 37:3 (1996), 534–542.

Заклучение и открытая проблема

Заклучение

Таким образом, доказано, что $v_1 = 0.94271\dots$, $v_2 = 0.98137\dots$, $v_3 = 1.01499\dots$ и каждому из этих значений соответствует **единственное** многообразие. Дальнейший список замкнутых многообразий малого объёма основан на приближенных компьютерных вычислениях.



Проблема.¹⁹ Найти наименьшее по объёму замкнутое **неориентируемое** 3-многообразие.

¹⁹D. Gabai, R. Meyerhoff, P. Milley, *Mom technology and hyperbolic 3-manifolds*, *Comment. Math. Helv.* 86 (2011), no. 1, pp. 145–188.

Наименьшие некомпактные многообразия

Дополнение к узлу восьмерка

Точка v_ω представляет наименьшее по объёму полное некомпактное ориентируемое многообразие. Долгое время этим многообразием считалось $S^3 \setminus K$, где $K = 4_1$ – узел восьмерка.



Фундаментальная группа $\pi_1(S^3 \setminus K) = \langle x, y \mid xy^{-1}xyx^{-1} = y^{-1}xyx^{-1}y \rangle$ имеет точное дискретное представление в $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C}) = \mathrm{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$:

$$x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}.$$

$S^3 \setminus K$ можно склеить из двух копий правильного идеального тетраэдра $T(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$, следовательно $\mathrm{vol}(S^3 \setminus K) = 6\Lambda(\frac{\pi}{3}) = 2.029\dots$

Некомпактные ориентируемые многообразия

Теорема.²⁰ Дополнение к узлу восьмерка $S^3 \setminus K$ и многообразии $\mathcal{W}(5, -1; 0, 0)$, получаемое $(5, -1)$ -хирургией на одной компонента зацепления Уайтхеда \mathcal{W} , являются наименьшими по объёму ориентируемыми гиперболическими 3-многообразиями с каспами, и только они являются такими. Их объёмы равны $6\Lambda(\frac{\pi}{3})$.

Таким образом, имеется ровно два минимальных ориентируемых некомпактных многообразия. Их объём соответствует v_{ω} .

Теорема.²¹ Существует только 10 ориентируемых гиперболических многообразий N с одним каспом, таких, что $\text{vol}(N) \leq 2.848$, и все эти многообразия совпадают первыми 10 такими многообразиями в списке SnapPea: $m003, m004, m006, m007, m009, m010, m011, m015, m016, m017$.

²⁰C. Cao, G. R. Meyerhoff, *The orientable cusped hyperbolic 3-manifolds of minimal volume*, Invent. Math. 146 (2001), 451–478.

²¹D. Gabai, R. Meyerhoff, P. Milley, *Mom technology and hyperbolic 3-manifolds*, Comment. Math. Helv. 86 (2011), 145–188.

Первые 14 некомпактных ориентируемых многообразия

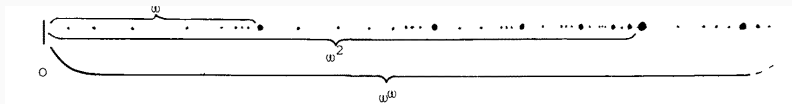
Теорема.²² Существует только 14 полных некомпактных гиперболических 3-многообразий с объемом $\text{vol}(N) \leq 3.07$. Обозначения как в SnapPea.

многообразие	объем	гомологии
$m003$	$v_\omega = 2.0298832128 \dots$	$\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}$
$m004 = S^3 \setminus 4_1$	$v_\omega = 2.0298832128 \dots$	\mathbb{Z}
$m006$	$v_{2\omega} = 2.5689706009 \dots$	$\mathbb{Z}_5 \oplus \mathbb{Z}$
$m007$	$v_{2\omega} = 2.5689706009 \dots$	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}$
$m009$	$v_{3\omega} = 2.6667447834 \dots$	$\mathbb{Z}_2 \oplus \mathbb{Z}$
$m010$	$v_{3\omega} = 2.6667447834 \dots$	$\mathbb{Z}_6 \oplus \mathbb{Z}$
$m011$	$v_{4\omega} = 2.7818339124 \dots$	\mathbb{Z}
$m015 = S^3 \setminus 5_2$	$v_{5\omega} = 2.8281220883 \dots$	\mathbb{Z}
$m016$	$v_{5\omega} = 2.8281220883 \dots$	\mathbb{Z}
$m017$	$v_{5\omega} = 2.8281220883 \dots$	$\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}$
$m019$	$v_{6\omega} = 2.9441064866 \dots$	\mathbb{Z}
$m022$	$v_{7\omega} = 2.9891202829 \dots$	$\mathbb{Z}_7 \oplus \mathbb{Z}$
$m023$	$v_{7\omega} = 2.9891202829 \dots$	$\mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}$
$m026$	$v_{8\omega} = 3.0593380578 \dots$	\mathbb{Z}

²²D. Gabai, R. Haraway, R. Meyerhoff, N. Thurston, A. Yarmola, *Hyperbolic 3-manifolds of low cusp volume*, <https://arxiv.org/abs/2109.14570>

Заклучение

В таблице приведены значения объемов $V_\omega, V_{2\omega}, \dots, V_{8\omega}$ и некомпактные ориентируемые многообразия с такими объемами. Из таблицы видно, что имеются пары и тройки многообразий равных объемов.



Некомпактные неориентируемые многообразия

В 1912 г. Гисекинг построил некомпактное неориентируемое гиперболическое 3-многообразие M_G склеив попарно грани правильного идеального тетраэдра $T(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$. Таким образом, $\text{vol}(M_G) = 3\Lambda(\frac{\pi}{3}) = 1.01494\dots$. Известно, что многообразие M_G двулистно покрывается ориентируемым многообразием $S^3 \setminus 4_1$.

Теорема.²³ Если M – некомпактное гиперболическое 3-многообразие минимального объёма, то оно является многообразием Гисекинга M_G .

Каспом многообразия Гисекинга является бутылка Клейна.

Проблема.²⁴ Найти наименьшее по объёму неориентируемое 3-многообразие с каспами, имеющее торический касп.

²³C. Adams, *The noncompact hyperbolic 3-manifold of minimal volume*, Proc. Amer. Math. Soc. 100:4 (1987), 601–606.

²⁴D. Gabai, R. Meyerhoff, P. Milley, *Mom technology and hyperbolic 3-manifolds*, Comment. Math. Helv. 86 (2011), 145–188.

Некомпактные неориентируемые многообразия

В 1912 г. Гисекинг построил некомпактное неориентируемое гиперболическое 3-многообразие M_G склеив попарно грани правильного идеального тетраэдра $T(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$. Таким образом, $\text{vol}(M_G) = 3\Lambda(\frac{\pi}{3}) = 1.01494\dots$. Известно, что многообразию M_G двулистно накрывается ориентируемым многообразием $S^3 \setminus 4_1$.

Теорема.²³ Если M – некомпактное гиперболическое 3-многообразие минимального объёма, то оно является многообразием Гисекинга M_G .

Каспом многообразия Гисекинга является бутылка Клейна.

Проблема.²⁴ Найти наименьшее по объёму неориентируемое 3-многообразие с каспами, имеющее торический касп.

²³C. Adams, *The noncompact hyperbolic 3-manifold of minimal volume*, Proc. Amer. Math. Soc. 100:4 (1987), 601–606.

²⁴D. Gabai, R. Meyerhoff, P. Milley, *Mom technology and hyperbolic 3-manifolds*, Comment. Math. Helv. 86 (2011), 145–188.

Замкнутые многообразия,
соответствующие
предельным ординалам

Семейства компактных и некомпактных многообразия

Вопрос (Тёрстон): Существуют ли замкнутые ориентируемые многообразия, объёмы которых соответствуют предельным ординалам?

Пусть M_n , $n \geq 4$, – разветвленное \mathbb{Z}_n -накрытие S^3 , разветвленное над узлом восьмерка. M_n называются многообразиями Фибоначчи.

$$\pi_1(M_n) = F(2, 2n) = \langle x_1, \dots, x_{2n} \mid x_i x_{i+1} = x_{i+2}, \quad i = 1, \dots, 2n \rangle.$$

Для $n \geq 2$ рассмотрим косу на трех нитях, задаваемую элементом группы кос $(\sigma_1 \sigma_2^{-1})^n \in B_3$. Косы для $n = 2, 3, 4$ приведены на рисунке.



Обозначим через Th_n замыкание косы $(\sigma_1 \sigma_2^{-1})^n$. В частности, Th_2 – это узел восьмерка.

Известно, что при $n \geq 2$ многообразие $S^3 \setminus Th_n$ является некомпактным гиперболическим многообразием.

Равенство объёмов

Вопрос (Kuiper):²⁵ Верно ли, что многообразие Фибоначчи M_4 является компактным гиперболическим многообразием наименьшего объема? (Он называл M_n многообразиями Меннике.)

Теорема.²⁶ Для $n \geq 2$ имеет место равенство объёмов замкнутого многообразия M_{2n} и полного некомпактного многообразия $S^3 \setminus Th_n$:

$$\text{vol}(M_{2n}) = \text{vol}(S^3 \setminus Th_n) = 4n(\Lambda(\alpha + \gamma) + \Lambda(\alpha - \gamma)),$$

где $\gamma = \frac{\pi}{2n}$ и $\alpha = \frac{1}{2} \arccos(\cos(2\gamma) - \frac{1}{2})$.

Таким образом, объёмы замкнутых многообразий Фибоначчи соответствуют предельным ординалам в теореме Тёрстона. В частности, при $n = 2$ получаем, что $\text{vol}(M_4) = v_\omega$.

²⁵ N. Kuiper, *Fairly symmetric hyperbolic manifolds*. (Труды геометрического конгресса в Авиньоне, 1988)

²⁶ А. Веснин, А. Медных, *О предельных порядковых числах в теореме Тёрстона — Ергенсена об объемах трехмерных гиперболических многообразий*, Докл. РАН 336:1 (1994), 7–10.

Вопрос (Kuiper):²⁵ Верно ли, что многообразие Фибоначчи M_4 является компактным гиперболическим многообразием наименьшего объема? (Он называл M_n многообразиями Меннике.)

Теорема.²⁶ Для $n \geq 2$ имеет место равенство объёмов замкнутого многообразия M_{2n} и полного некомпактного многообразия $S^3 \setminus Th_n$:

$$\text{vol}(M_{2n}) = \text{vol}(S^3 \setminus Th_n) = 4n(\Lambda(\alpha + \gamma) + \Lambda(\alpha - \gamma)),$$

где $\gamma = \frac{\pi}{2n}$ и $\alpha = \frac{1}{2} \arccos(\cos(2\gamma) - \frac{1}{2})$.

Таким образом, объёмы замкнутых многообразий Фибоначчи соответствуют предельным ординалам в теореме Тёрстона. В частности, при $n = 2$ получаем, что $\text{vol}(M_4) = v_\omega$.

²⁵ N. Kuiper, *Fairly symmetric hyperbolic manifolds*. (Труды геометрического конгресса в Авиньоне, 1988)

²⁶ А. Веснин, А. Медных, *О предельных порядковых числах в теореме Тёрстона — Ергенсена об объемах трехмерных гиперболических многообразий*, Докл. РАН 336:1 (1994), 7–10.

Замкнутые многообразия равного объёма

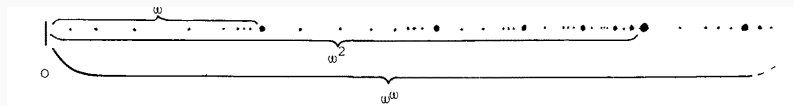
По теореме Тёрстона число многообразий равного объёма конечно.

Веснин [1991] и Zimmermann [1994] показали, что для любого $n > 0$ существует не менее, чем n замкнутых многообразий равного объёма.

(1) Многообразия строились из прямоугольных многогранников с помощью раскраски граней в 4 цвета. Тем самым в прямоугольной группе Коксетера указывались различные подгруппы индекса 8 без кручений, и если многогранник достаточно большой, то число таких подгрупп велико.

(2) Также рассматривались подгруппы без кручений в группах Коксетера, и увеличивался индекс таких подгрупп. В обеих конструкциях многообразия равного объёма являются соизмеримыми.

Вопрос [Zimmermann, 1994] ²⁷ Существует ли сколь угодно большое число несоизмеримых замкнутых 3-многообразий равного объёма?



²⁷ В. Zimmermann, *A note on hyperbolic 3-manifolds of the same volume*, *Mh. Math.* 117 (1994), 139–142.

Открытые вопросы

Вопросы из списка Кирби (1)

R.I. Baykur, R.C. Kirby, D. Ruberman (eds.). [K3: A New Problem List in Low-Dimensional Topology](#). American Mathematical Society, 2026, 430 pp.

Problem 1.16. (form Kirby97)

(a) Given a knot $K \subset S^3$ determine all knots $K' \subset S^3$ for which the branched double covers of S^3 along K and K' are homeomorphic.

(b) Find a set of moves on links in S^3 so that two links are related by these moves if and only if they have the same branched double cover.

Comment.

Let $\Sigma(K)$ denote the branched double cover of S^3 along K . Mecchia and Zimmermann [2004] showed that if $\Sigma(K)$ is hyperbolic, then there are at most eight other K' with $\Sigma(K') = \Sigma(K)$.

Вопросы из списка Кирби (2)

Problem 1.27 (Kashaev-Murakami-Murakami Volume Conjecture).

For a link $L \subset S^3$,

$$\frac{1}{2\pi} \text{vol}_{\text{hyp}}(S^3 - L) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} |J_n(L, \exp 2\pi/n.)|$$

Problem 1.29 (Vol-Det Conjecture).

For any alternating hyperbolic knot $K \subset S^3$,

$$\text{vol}(K) < 2\pi \log \det(K) \quad (= 2\pi \log J_2(K, -1)).$$

Comments.

Dunfield, Champanerkar-Kofman-Purcell. Burton: гипотеза верна для 2-мостовых узлов, замыканий альтернированных кос на 3 нитях, одного бесконечного семейства альтернированных 3-кос.

Веснин-Егоров (2026): гипотеза верна для зацеплений с большим числом областей скручивания и перекрестков.

Вопросы из списка Кирби (3)

Problem 1.88.

Are there infinitely many congruence classes of arithmetic links in the 3-sphere?

Problem 3.1.

Classify the smallest volume hyperbolic 3-manifolds of various types. In particular:

- (a) Determine the nonorientable closed hyperbolic 3-manifolds of least volume.
- (b) Determine the n -cusped hyperbolic 3-manifolds of least volume for each $n > 2$.
- (c) Determine the smallest volume hyperbolic 3-manifolds with n orientable cusps for each n .
- (d) Determine the n -cusped orientable hyperbolic 3-manifolds of least volume for each n .

Problem 3.2.

Show that the volumes of hyperbolic 3-manifolds are not all rationally related.

Спасибо за внимание!

`vesnin@math.nsc.ru`