

# Нормированные объемы гиперболических узлов и многогранников

Лекция 2: Вычисление объемов и оценки объемов

А.Ю. Веснин

ИМ СО РАН, ТГУ, НГУ

Школа "Торическая топология, гиперболическая геометрия и комбинаторная теория групп"  
ФТ "Сириус", 17-21 мая 2026 г.

1. Геометризация узлов согласно Терстону
2. Существование многогранников в пространстве Лобачевского
3. Зачем изучать идеальные прямоугольные многогранники?
4. Идеальные прямоугольные многогранники
5. Прямоугольные многогранники в теории узлов

# Геометризация узлов согласно Терстону

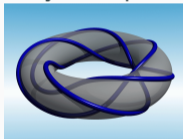
---

# Геометризация дополнений к узлам и зацеплениям

Теорема [W. Thurston, высказана R. Riley как гипотеза в 1975]

Если узел  $K \subset S^3$  не является торическим или сателлитным, то его дополнение  $S^3 \setminus K$  является гиперболическим многообразием.

Торический узел – это простая замкнутая кривая на стандартном торе в  $\mathbb{R}^3$ .



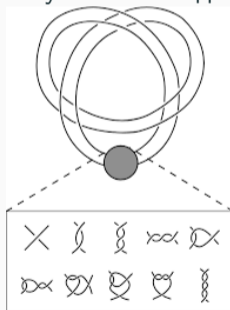
Если узел  $K$  расположен внутри утолщенного тора  $V$ , а  $V$  заузлен в  $S^3$ , то  $K$  называется сателлитным узлом. Сердцевина  $C$  утолщенного тора  $V$  называется компаньоном узла  $K$ , а  $K$  – сателлитом узла  $C$ .

[W. Thurston, Three dimensional manifolds, Kleinian groups and hyperbolic geometry. Bull. AMS, 1982.]

# Сателлитные узлы

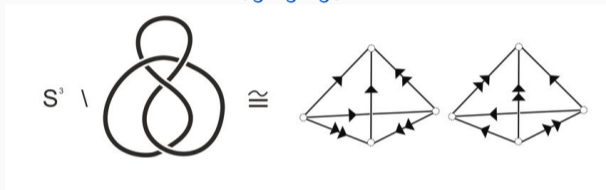
Среди узлов, имеющих проекции с  $\leq 16$  перекрестками, только 32 негиперболических: 12 – торические, 20 – сателлиты трилистника.

Каждый сателлитный узел с  $\leq 16$  перекрестками получается подстановкой одного из указанных фрагментов или зеркального ему в тёмный диск.



## Самый известный гиперболический узел – восьмерка

Дополнение к узлу восьмерка (обозначение Рольфсена  $4_1$ ) может быть склеено из двух копий идеального тетраэдра  $T(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ .



Группа узла  $\pi_1(S^3 \setminus 4_1) = \langle x, y \mid xy^{-1}xyx^{-1} = y^{-1}xyx^{-1}y \rangle$ , где  $x, y$  – меридианы, имеет точное дискретное представление в  $\text{PSL}(2, \mathbb{C}) = \text{Isom}^+(\mathbb{H}^3)$ :

$$x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\omega & 1 \end{pmatrix}, \quad \text{где } \omega = \frac{-1 + \sqrt{-3}}{2}.$$

Riley:  $\Gamma$  – подгруппа индекса 12 в группе  $\text{PSL}(2, \mathcal{O}(\sqrt{-3}))$ .

## Параметризация идеального тетраэдра

Многогранник в  $\overline{\mathbb{H}^3}$  называется **идеальным**, если все вершины лежат на  $\partial\mathbb{H}^3 = \overline{\mathbb{C}}$ .

Каждый идеальный тетраэдр изометричен идеальному тетраэдру с вершинами в точках  $0, 1, z, \infty$  для некоторого  $z \in \mathbb{C}, \operatorname{Im}(z) > 0$ .

Двугранные углы тетраэдра  $T_z$  равны  $\arg z, \arg z'$  и  $\arg z''$ , где

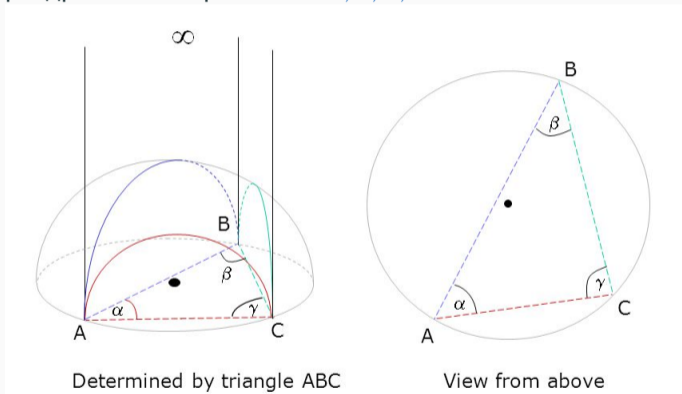
$$z' = 1 - \frac{1}{z}, \quad z'' = (z')' = \frac{1}{1-z}, \quad z''' = (z'')' = z.$$

При этом,  $zz'z'' = -1$  и  $\arg(z) + \arg(z') + \arg(z''') = \pi$ .

Идеальные тетраэдры  $T_z, T_{z'}$  и  $T_{z''}$  изометричны.

# Объем идеального тетраэдра через комплексный параметр

Пусть  $T_z$  – тетраэдр в  $\mathbb{H}^3$  с вершинами  $0, 1, z, \infty$ .

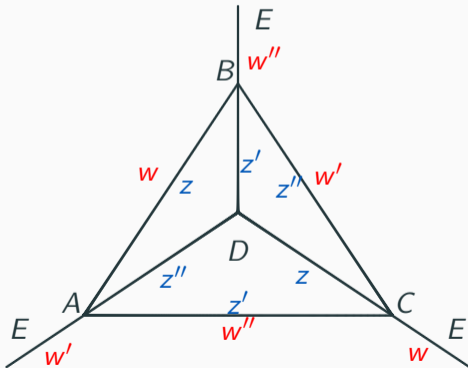


Тогда объем идеального тетраэдра выражается формулой

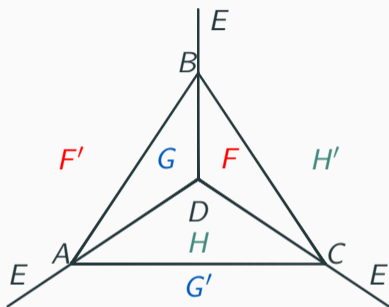
$$\text{vol}(T_z) = \Lambda(\arg z) + \Lambda(\arg(z')) + \Lambda(\arg(z'')).$$

## Склеивание дополнения к узлу восьмерка

Пусть многогранник  $\mathcal{P}$  составлен из двух идеальных тетраэдров  $\mathcal{P} = T_z \cup T_w$ , где  $T_z = ABCD$  и  $T_w = ACDE$ . На рисунке их ребрам приписаны двугранные углы.



## Попарное отождествление граней изометриями



Зададим попарное отождествление граней изометриями пространства  $\mathbb{H}^3$ :

$$f : F = BCD \rightarrow F' = BEA,$$

$$g : G = ADB \rightarrow G' = ACE,$$

$$h : H = CDA \rightarrow H' = ECB.$$

Рассмотрим группу, порожденную этими изометриями  $\Theta = \langle f, g, h \rangle$

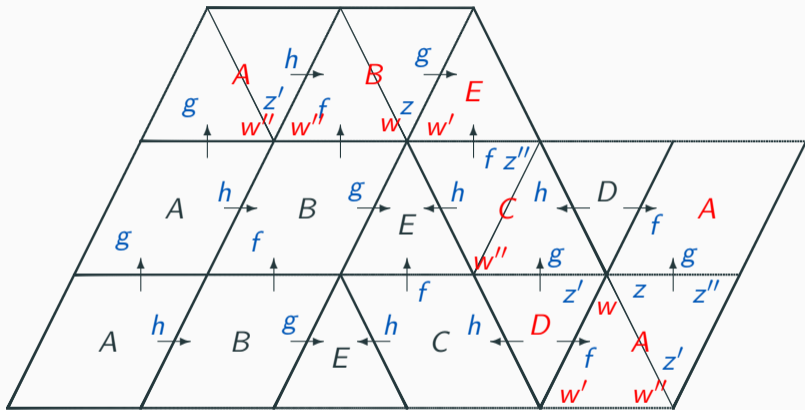
Под действием  $\Theta$  ребра многогранника разбиваются на классы эквивалентности:

$$BA \xrightarrow{g} EA \xrightarrow{f^{-1}} CD \xrightarrow{h} EC \xrightarrow{g^{-1}} BD \xrightarrow{f} BA, \quad AD \xrightarrow{g} AC \xrightarrow{h} BE \xrightarrow{f^{-1}} BC \xrightarrow{h^{-1}} AD,$$

откуда  $g f^{-1} h g^{-1} f = 1$  (значит  $z(z-1)w(w-1) = 1$ ); и  $g h f^{-1} h^{-1} = 1$ . Т.к.  $\mathcal{P}$  – фундаментальный многогранник для группы  $\Theta$ , то получаем

$$\Theta = \langle f, g \mid g [f^{-1} g] = [f^{-1} g] f^{-1} \rangle.$$

## Замощение евклидовой плоскости



Меридиану узла  $m = y = g$  соответствует действие  $\frac{1}{w''} z = z(1 - w)$ . Параллели  $\ell = xyx^{-1}y^{-1}y^{-1}x^{-1}yx = f^{-1}gfg^{-1}h^{-1}$  соответствует действие

$$w' \frac{1}{z'} w'' \frac{1}{z''} w' z w w'' z' w'' = z(z-1) \frac{1}{w(w-1)}.$$

## Уравнения согласования

Для конического многообразия  $K(\alpha)$  с сингулярным углом  $\alpha$  вдоль узла  $K$  ( $\alpha = 0$  – случай многообразия,  $\alpha = \frac{2\pi}{n}$ ,  $n \geq 4$  – случай орбифолда) получаем систему условий на параметры  $z$  и  $w$  идеальных тетраэдров  $T_z$  и  $T_w$ :

$$\begin{cases} z(z-1)w(w-1) = 1, \\ \log(z(1-w)) = \alpha i, \\ \operatorname{Im} z > 0, \quad \operatorname{Im} w > 0. \end{cases}$$

Откуда

$$w = \frac{1}{2} + i(\sin \theta - \sin \alpha), \quad z = \frac{\cos \alpha + i \sin \alpha}{\frac{1}{2} - i(\sin \theta - \sin \alpha)}.$$

и

$$\operatorname{vol}(T_w) = 2\Lambda\left(\frac{\theta + \alpha}{2}\right), \quad \operatorname{vol}(T_z) = 2\Lambda\left(\frac{\theta - \alpha}{2}\right),$$

где  $\cos \theta = \cos \alpha - \frac{1}{2}$ .

## Значения объемов

Для многообразия – дополнение к узлу восьмерка  $K = 4_1$  получаем полную гиперболическую структуру:  $\alpha = 0$  и  $\theta = \frac{\pi}{3}$ .

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) = 4\Lambda\left(\frac{\pi}{6}\right) = 6\Lambda\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2,029\dots$$

Трехмерный гиперболический орбиформ  $K(4)$  с носителем  $S^3$  и сингулярным множеством узел  $K = 4_1$  и локальной группой  $\mathbb{Z}_4$ :  $\alpha = \frac{2\pi}{4}$  и  $\theta = \frac{2\pi}{3}$ .

$$\text{vol}(K(4)) = 2\Lambda\left(\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4}\right) + 2\Lambda\left(\frac{\pi}{3} - \frac{\pi}{4}\right) = \frac{3}{2}\Lambda\left(\frac{\pi}{3}\right).$$

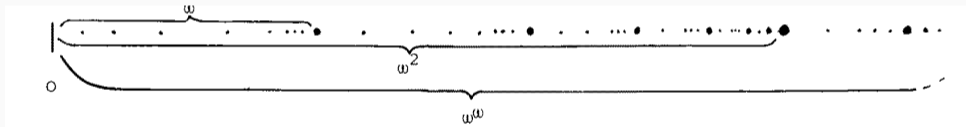
Мы воспользовались тем, что

$$\Lambda(n\theta) = \sum_{k \bmod n} n\Lambda\left(\theta + \frac{k\pi}{n}\right).$$

# Предельный ординал в теореме Терстона – Йоргенсена

Определим  $M_4$  как разветвленное  $\mathbb{Z}_4$ -накрытие  $S^3$  с ветвлением вдоль  $K = 4_1$ . Многообразию  $M_n$  является замкнутым (это многообразие Фибоначчи!) и имеет место равенство

$$\text{vol}(M_4) = 4 \text{vol}(K(4)) = \text{vol}(S^3 \setminus K).$$



Точка  $x_\omega$  представляет наименьшее по объему полное некомпактное ориентируемое многообразие. Известно, что это  $S^3 \setminus K$ , где  $K$  – узел восьмерка. Мы доказали следующий результат.

**Теорема.** Объем замкнутого ориентируемого многообразия  $M_4$  соответствует  $x_\omega$ .

## Какие многообразия можно склеить из $n$ копий $T(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ ?

Обозначим  $\mathcal{T} = T(\frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{3})$ . Гиперболическое многообразие назовем **тетраэдральным**, если его можно склеить из конечного числа копий  $\mathcal{T}$ . Например, таким является  $S^3 \setminus 4_1$ .

**Теорема.** [Fominykh, Garoufalidis, Goerner, Tarkaev, Vesnin, 2016]

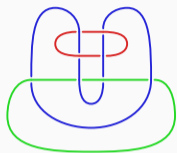
Табулированы тетраэдральные многообразия:

- все **11580 ориентируемых** из не более, чем **25** копий  $\mathcal{T}$ ;
- все **25194 неориентируемых** из не более, чем **21** копий  $\mathcal{T}$ .

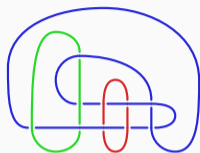
Указанные многообразия доступны в компьютерной базе гиперболических 3-многообразий и узлов **SnapPy**. Их фундаментальные группы соизмеримы с группой Коксетера, порожденной отражениями в гранях  $\mathcal{T}$ :

$$\langle g_1, g_2, g_3, g_4 \mid g_i^2 = 1, \quad i = 1, \dots, 4, \quad (g_i g_j)^3 = 1, \quad i \neq j \rangle.$$

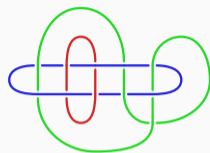
## Некоторые зацепления для случая 10 копий $\mathcal{T}$



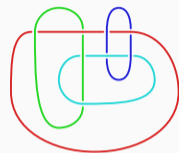
$L8a20$



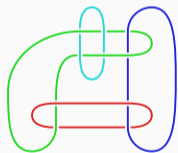
$L10n88$



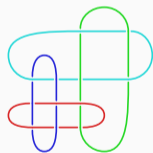
$L11n354$



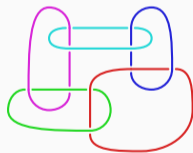
$L8a21$



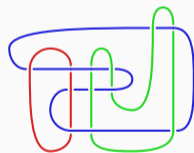
$L10n101$



$L12n2201$



$L10n113$



$L12n1739$

Объем дополнения к каждому из этих зацеплений равен  $10^{V_{tet}}$ .

Существование  
многогранников в  
пространстве Лобачевского

---

## Какие многогранники реализуются в $\mathbb{H}^3$ ?

**Теорема.**<sup>1</sup> Многогранник с заданным 1-скелетом, отличным от симплекса и треугольной призмы, и предписанными нетупыми ( $\leq \pi/2$ ) двугранными углами реализуется в  $\mathbb{H}^3$  как выпуклый многогранник конечного объема тогда и только тогда, когда выполнены приведенные ниже условия. Реализация единственна с точностью до изометрии пространства. Условия Андреева:

- 1) если три грани сходятся в одной вершине, то  $\alpha + \beta + \gamma \geq \pi$ ;
- 2) если четыре грани сходятся в одной вершине, то  $\alpha + \beta + \gamma + \delta = 2\pi$ ;
- 3) если три грани попарно смежны, но не имеют общей вершины, то  $\alpha + \beta + \gamma < \pi$ ;
- 4) если четыре грани смежны по кругу, но не сходятся в одной вершине, то  $\alpha + \beta + \gamma + \delta < 2\pi$ ;
- 5) если грань  $\Gamma_1$  смежна с  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$ , а  $\Gamma_2$  и  $\Gamma_3$  не смежны, но имеют общую вершину, не принадлежащую  $\Gamma_1$ , то  $\alpha_{12} + \alpha_{13} < \pi$ .

<sup>1</sup>Е.М. Андреев, О выпуклых многогранниках конечного объема в пространстве Лобачевского, Матем. сб. 83:2 (1970), 256-260.

Зачем изучать идеальные  
прямоугольные  
многогранники?

---

# Зацепления и прямоугольные многогранники

Зацепление  $L$  называется **прямоугольным**<sup>2</sup>, если его дополнение  $S^3 \setminus L$  как гиперболическое многообразие разбивается на идеальные прямоугольные многогранники.

**Пример.** Зацепление Уайтхеда и Борромеевы кольца – прямоугольные.

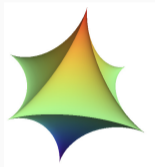


---

<sup>2</sup>А. Champanerkar, I. Kofman, J. Purcell, Right-angled polyhedra and alternating links, arXiv:1910.13131

## Зацепление Уайтхеда и октаэдр

Пусть  $O$  – идеальный прямоугольный гиперболический октаэдр в модели  $\mathbb{H}^3$  в верхнем полупространстве с вершинами  $\infty, 0, -1, -1 + \sqrt{-1}, \sqrt{-1}, \frac{-1+\sqrt{-1}}{2} \in \partial\mathbb{H}^3$ .



Группа  $\Gamma = \pi_1(S^3 \setminus W) = \langle x, y : [x, y][x, y^{-1}][x^{-1}, y^{-1}][x^{-1}, y] = 1 \rangle$  имеет точное дискретное представление в  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{C})$ :

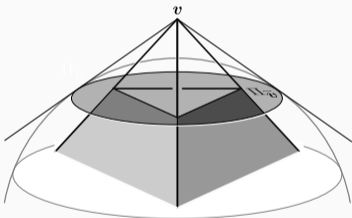
$$x \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & \sqrt{-1} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 - \sqrt{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

$\Gamma$  – подгруппа индекса 12 в группе  $\mathrm{PSL}(2, \mathbb{Z}[\sqrt{-1}])$ .

## Многогранники с усеченными вершинами

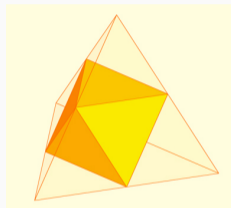
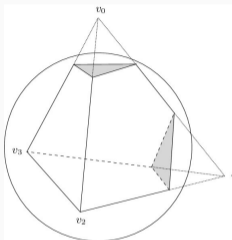
Наряду с обычными и идеальными вершинами разрешим ультраидеальные вершины (лежащие за абсолютом).

Ультраидеальной вершине соответствует ее усечение полярной плоскостью:



Тетраэдр будем называть **обобщенным гиперболическим тетраэдром**, если его вершины обычные, идеальные или усеченные.

# Примеры обобщенных гиперболических тетраэдров



Можно ли оценить объем **обобщенного гиперболического тетраэдра**?

**Теорема.**<sup>3</sup> Максимальный объём среди обобщенных гиперболических тетраэдров реализуется на идеальном прямоугольном октаэдре,  $V_{Oct} = 8\Lambda\left(\frac{\pi}{4}\right) \approx 3.66$

<sup>3</sup>A. Ushijima, A volume formula for generalized hyperbolic polyhedra, in Mathematics and Its Applications 581 (2006), 249–265.

## Вариационный подход

Теорема.<sup>4</sup> [Вариационная формула Шлефли]

Пусть  $P_t$  – гладкое семейство компактных многогранников в  $\mathbb{S}^3$ ,  $\mathbb{E}^3$  или  $\mathbb{H}^3$ . Тогда

$$k \cdot d \operatorname{vol}(P_t) = \frac{1}{2} \sum_e \ell(e) d\theta(e),$$

где  $k$  – кривизна пространства. Суммирование ведется по всем ребрам  $e$ , а  $\theta(e)$  – двугранный угол при ребре  $e$ .

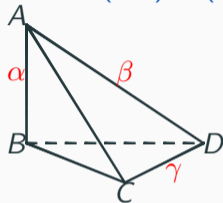
Шлефли доказал теорему для тетраэдра в трехмерном сферическом пространстве.

---

<sup>4</sup>Э.Б. Винберг, Объемы неевклидовых многогранников, Успехи матем. наук 48:2 (1993), 17–46

# Объем бипрямоугольного тетраэдра

Тетраэдр  $ABCD$  бипрямоугольный если  $(AB) \perp (BCD)$  и  $(ABC) \perp (CD)$ .



Теорема.<sup>5</sup> Пусть  $R(\alpha, \beta, \gamma)$  – бипрямоугольный тетраэдр. Тогда

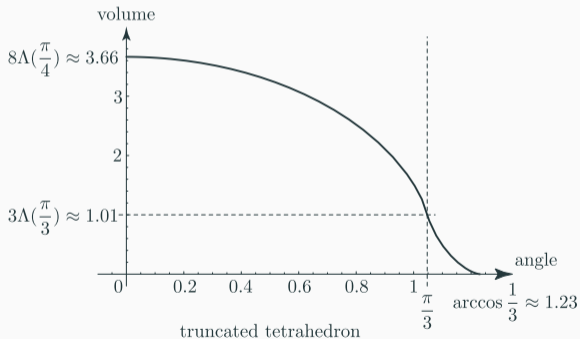
$$\begin{aligned} \text{vol}(R(\alpha, \beta, \gamma)) = \frac{1}{4} & \left( \Lambda(\alpha + \delta) - \Lambda(\alpha - \delta) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} + \beta - \delta\right) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \beta - \delta\right) \right. \\ & \left. + \Lambda(\gamma + \delta) - \Lambda(\gamma - \delta) + 2\Lambda\left(\frac{\pi}{2} - \delta\right) \right), \end{aligned}$$

где  $0 \leq \delta = \arctan \frac{\sqrt{\cos^2 \beta - \sin^2 \alpha \sin^2 \gamma}}{\cos \alpha \cos \gamma} < \frac{\pi}{2}$ .

<sup>5</sup> Э.Б. Винберг, Объемы неевклидовых многогранников, Успехи матем. наук 48:2 (1993), 17–46.

# Объемы обобщенных гиперболических тетраэдров

Объемы правильных (все двугранные углы равны) обобщенных гиперболических тетраэдров.



Напомним, что  $V_{tet} = 3\Lambda(\frac{\pi}{3})$  и  $V_{oct} = 8\Lambda(\frac{\pi}{4})$ .

# Гипотеза о максимальном объеме и теорема Билетти

**Гипотеза.**<sup>6</sup> Пусть  $\Gamma$  – плоский 3-связный граф,  $TV_r(\Gamma)$  – его инвариант Тураева – Виро, и  $r$  нечётное положительное. Пусть  $\mathcal{P}(\Gamma)$  – множество всех обобщенных гиперболических многогранников с 1-скелетом  $\Gamma$ . Тогда

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{r} \log \left( TV_r(\Gamma; e^{\frac{2\pi i}{r}}) \right) = \sup_{P \in \mathcal{P}(\Gamma)} \text{vol}(P).$$

**Ректификацией** (rectified polyhedron)  $\bar{\Gamma}$  графа  $\Gamma$  назовём идеальный прямоугольный гиперболический многогранник, полученный усечением всех вершин графа  $\Gamma$ .

**Теорема.** [G. Belletti]<sup>7</sup> В обозначениях как выше, имеем

$$\sup_{P \in \mathcal{P}(\Gamma)} \text{vol}(P) = \text{vol}(\bar{\Gamma}).$$

---

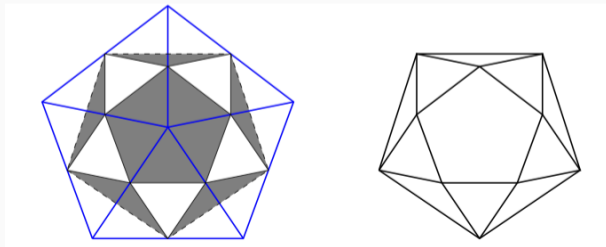
<sup>6</sup> F. Costantino, F. Gueritaud, R. van der Veen, On the volume conjecture for polyhedra. *Geom Dedicata* 179 (2015), 385–409.

<sup>7</sup> G. Belletti, The maximum volume of hyperbolic polyhedra, *TAMS*, 374 (2021), 1125–1153.

## Что стоит в правой части?

Ректификацией 5-угольной пирамиды  $P(5)$  является антипризма  $A(5)$ :

- 1-скелет антипризмы  $A(5)$  является **медиальным графом** для 1-скелета пирамиды  $P(5)$ ;
- 1-скелет пирамиды  $P(5)$  является **графом шахматной раскраски** для антипризмы  $A(5)$ .



Пирамида  $P(5)$

Антипризма  $A(5)$

# Идеальные прямоугольные многогранники

---

## Прямоугольная версия теоремы Андреева

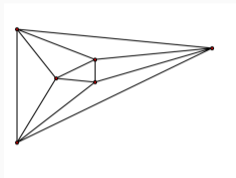
Комбинаторный многогранник  $P$  реализуется в  $\mathbb{H}^3$  как **идеальный** (все вершины лежат на абсолюте  $\partial\mathbb{H}^3$ ) **прямоугольный** (все двугранные углы  $\frac{\pi}{2}$ ) тогда и только тогда, когда он является **4-валентным**, **не имеет 3-обходов** и **нетривиальных 4-обходов**. Такая реализация единственна с точностью до изометрии пространства.

Из формулы Эйлера  $V - E + F = 2$  и 4-валентности,  $2E = 4V$ , следует, что  $F = V + 2$ . Пусть  $p_k$  – число  $k$ -угольных граней ( $k \geq 3$ ) многогранника  $P$ . Тогда

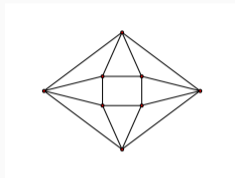
$$p_3 = 8 + \sum_{k \geq 5} p_k(k - 4).$$

Следовательно, каждый такой многогранник имеет не менее 8 треугольных граней. Минимальным многогранником является **октаэдр**

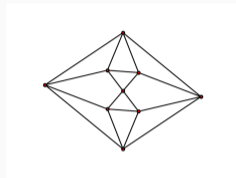
## Первые семь идеальных $\pi/2$ -многогранников



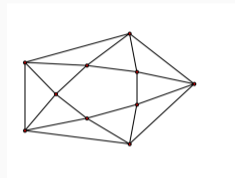
(1)  $\text{vol}(P_8) = 3.66$



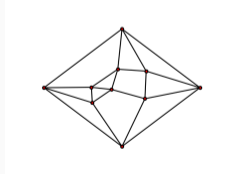
(2)  $\text{vol}(P_{10}) = 6.02$



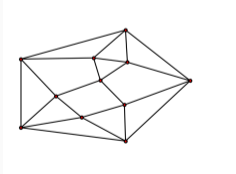
(3)  $\text{vol}(P_{11}) = 7.32$



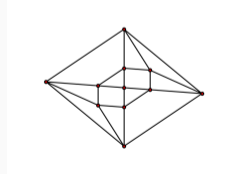
(4)  $\text{vol}(P_{12}^{\min}) = 8.13$



(5)  $\text{vol}(P_{12}^{\max}) = 8.61$

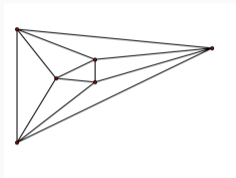


(6)  $\text{vol}(P_{13}^{\min}) = 9.68$

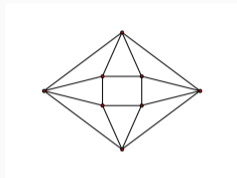


(7)  $\text{vol}(P_{13}^{\max}) = 10.14$

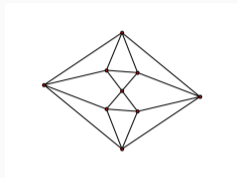
# Арифметические и неарифметические многогранники



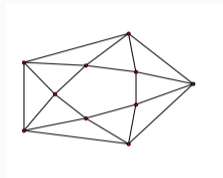
(1) арифметический



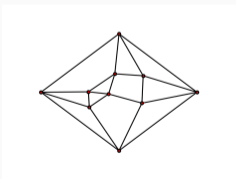
(2) арифметический



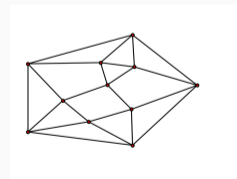
(3) арифметический



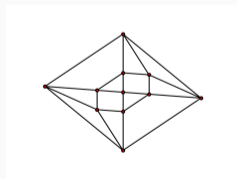
(4) неарифметический



(5) неизвестно



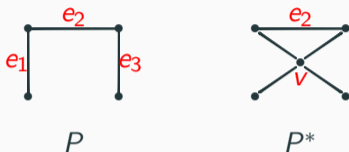
(6) неизвестно



(7) неизвестно

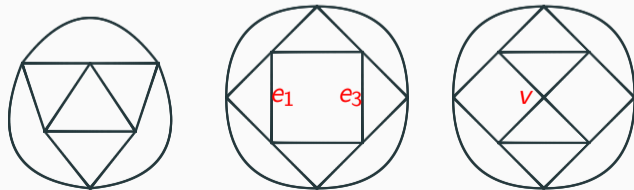
## Комбинаторное реберное скручивание

Пусть  $e_1, e_2, e_3$  – три последовательных ребра в  $n$ -угольной грани,  $n \geq 4$ :



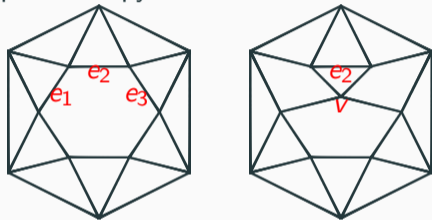
Реберное скручивание – это комбинаторное преобразование в 3 шага:

(1) удаление ребер  $e_1, e_3$ , (2) создание новой вершины  $v$ , (3) соединение  $v$  с концами удаленных ребер.



## Антипризмы и реберные скручивания

**Теорема.**<sup>8</sup> Если  $P$  - идеальный прямоугольный, то  $P = A(n)$ ,  $n \geq 3$ , или получается из  $A(n)$  реберными скручиваниями.



Антипризма  $A(6)$  и скрученная антипризма  $A(6)^*$ .

**Теорема.**<sup>9</sup> Объем прямоугольной скрученной антипризмы, равен

$$\text{vol}(A(n)^*) = \text{vol}(A(n-1)) + \text{vol}(A(3))$$

<sup>8</sup>G. Brinkmann et al., Generation of simple quadrangulations of the sphere, Discrete Math 305 (2005), 33–54.

<sup>9</sup>A. Egorov, A. Vesnin, Ideal right-angled polyhedra in Lobachevsky space, Chebyshevskii Sbornik 21:2 (2020), 65–83.

## Оценки объемов через число граней

Из теоремы Андреева следует, что гиперболический **идеальный прямоугольный** многогранник однозначно определяется своим комбинаторным строением.

Обозначим через  $F$  число его граней.

Если  $F = 8$ , то это октаэдр (3-антипризма)  $A(3)$ .

Если  $F = 9$ , то такого многогранника **не существует**.

Если  $F = 10$ , то это 4-антипризма  $A(4)$ .

**Теорема.** <sup>10 11</sup> Если многогранник  $P$  идеальный прямоугольный и  $F \geq 11$ , то

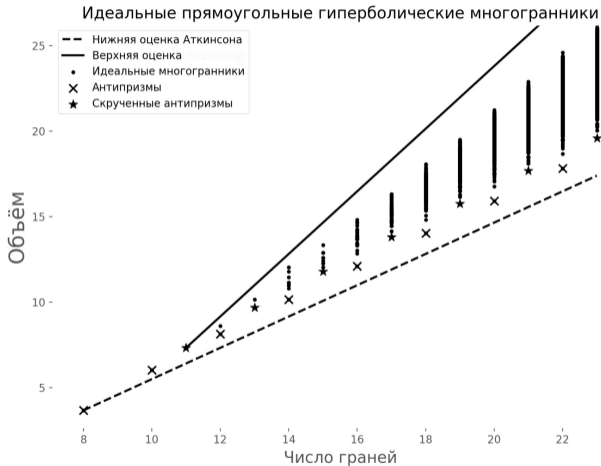
$$\frac{V_{\text{oct}}}{4} F - v_8 \leq \text{vol}(P) \leq \frac{V_{\text{oct}}}{2} F - \frac{7V_{\text{oct}}}{2}.$$

Верхняя оценка достигается, если  $P$  – удвоенный октаэдр ( $F = 11$ ).

<sup>10</sup> C. Atkinson, Volume estimates for equiangular hyperbolic Coxeter polyhedra, *Algebr. Geom. Topol.* 9 (2009), 1225–1254.

<sup>11</sup> A. Egorov, A. Vesnin, Volume estimates for right-angled hyperbolic polyhedra, *Rend. Istit. Mat. Univ. Trieste* 52 (2020), 565–576.

# Идеальные $\pi/2$ -многогранники с $\leq 23$ гранями



Объемы (В. - Егоров) и оценки объемов (Аткинсон и В. - Егоров).

# Многогранники минимального объема

**Гипотеза.** Среди всех идеальных прямоугольных многогранников  $P$  с  $n$  гранями минимальный объем достигается:

- если  $n = 2k + 2$ ,  $k \geq 3$ , то для **антипризмы**

$$P_n^{\min} = A(k).$$

- если  $n = 2k + 3$ ,  $k \geq 4$ , то для **скрученной антипризмы**

$$P_n^{\min} = A(k)^*.$$

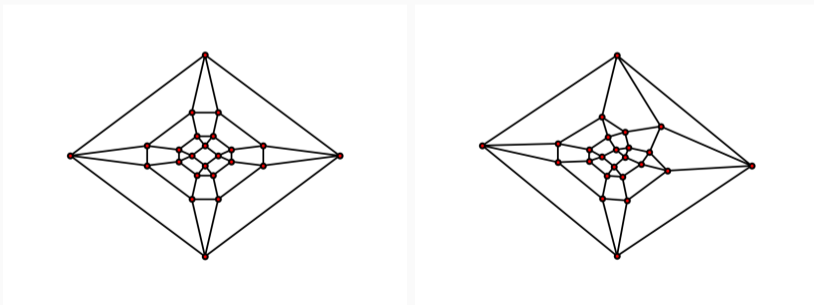
Гипотеза верна для  $n \leq 23$ .



# ITR-многогранники

Многогранник у которого никакие две треугольные грани не имеют общих вершин, назовем **ITR-многогранником** (isolated triangles rule).

**Теорема.** Пусть  $P$  – идеальный прямоугольный с  $F$  гранями, а  $p_3 \geq 8$  – число треугольных граней. Если  $F < 3p_3 + 2$ , то  $P$  не является ITR-многогранником.



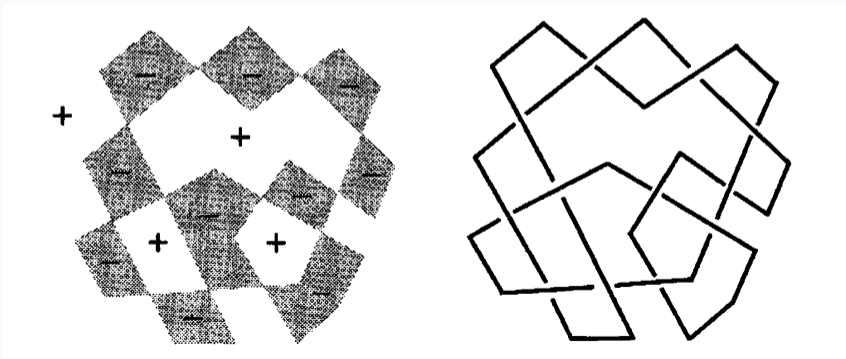
26-гранники с изолированными треугольниками

Прямоугольные  
многогранники в теории  
узлов

---

# Многогранники и альтернированные зацепления

Пусть  $\Gamma$  – связный 4-валентный граф на плоскости и для каждой вершины все встречающиеся в ней грани различны. Рассмотрим шахматную раскраску граней в 2 цвета: белый (знак “+”) и черный (знак “-”). Обозначим полученный комбинаторный многогранник через  $\Pi_{\Gamma}^{+}$ .



# От 4-валентных плоских графов к зацеплениям

Пусть  $\Pi_{\Gamma}^{-}$  – копия  $\Pi_{\Gamma}^{+}$  с противоположными знаками. Каждая грань  $F_i \subset \Pi_{\Gamma}^{\pm}$  является комбинаторным  $n_i$ -угольником и имеет знак  $\varepsilon_i$ . Склеим грань  $F_i \subset \Pi_{\Gamma}^{\pm}$  с гранью  $F'_i \subset \Pi_{\Gamma}^{\mp}$  поворотом на угол  $\varepsilon_i \frac{2\pi}{n_i}$ , где “+” соответствует повороту по часовой стрелке. Полученное топологическое пространство обозначим  $\overline{M}_{\Gamma}$ .

Пусть  $M_{\Gamma}$  получено из  $\overline{M}_{\Gamma}$  удалением вершин.

Обозначим через  $\mathcal{L}_{\Gamma}$  альтернированное зацепление для которого граф  $\Gamma$  является проекцией (см. рисунок на предыдущем слайде).

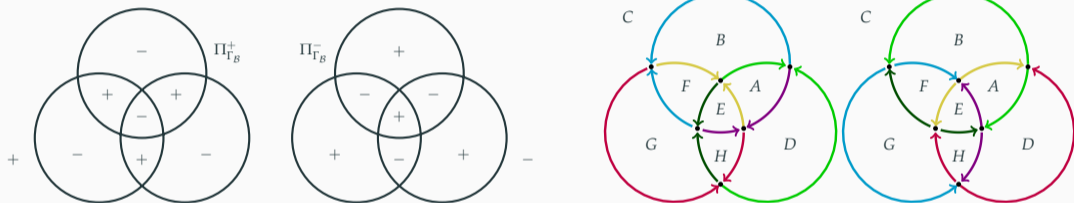
**Теорема.**<sup>12</sup> Многообразию  $M_{\Gamma}$  гомеоморфно дополнению  $S^3 \setminus \mathcal{L}_{\Gamma}$ .

---

<sup>12</sup>I. Aitchison, E. Lumsden, J.H. Rubinstein, Cusp structures of alternating links. Invent Math 109 (1992), 473–494.

## Пример: Борромеевы кольца

Дополнение к Борромеевым кольцам склеивается из двух **идеальных прямоугольных** октаэдров.



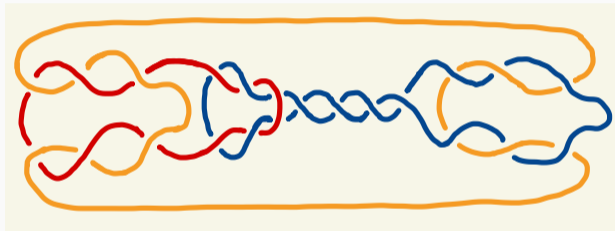
Склеивание граней индуцирует разбиение ребер на классы эквивалентности.

Каждый класс состоит из 4 ребер. Сумма углов в каждом классе  $\pi/2 * 4 = 2\pi$ .

Рисунки из [Alejandro Ucan-Puc, arXiv:2104.00516 (2021)].

## Области скручивания в диаграмме узла

Вопрос: Можно ли оценить объем  $S^3 \setminus K$  взглянув на диаграмму узла или зацепления  $K$ ?



Областью скручивания на диаграмме  $D$  узла  $K$  назовем максимальную цепочку полуоборотов на 2 нитях в диаграмме. Обозначим через  $t(D)$  число областей скручивания в  $D$ .

Для диаграммы Бруновского зацепления на рисунке  $t(D) = 7$ .

# Верхняя оценка объема через число областей скручивания

**Теорема** (Лакенби, Эгол, Терстон [2004]) Если диаграмма  $D$  узла или зацепления  $K$  имеет  $t(D)$  областей скручивания, то

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) \leq 10v_{tet} \cdot (t(D) - 1).$$

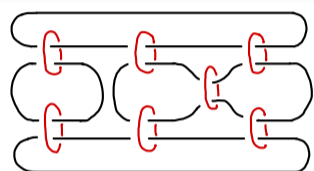
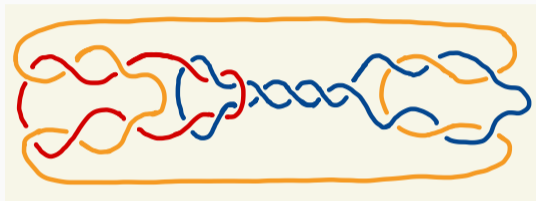
Если диаграмма имеет много областей скручивания, то оценку можно улучшить.

**Теорема.** (В.–Егоров [2024]) Если диаграмма  $D$  узла или зацепления  $K$  имеет  $t(D) > 8$  областей скручивания, то

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) \leq 10v_{tet} \cdot (t(D) - 1, 4).$$

## Схема доказательства Теоремы (шаг 1)

От диаграммы  $D$  зацепления  $K$  с  $t(D) = 7$  областями скручивания



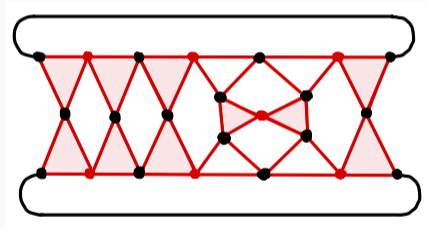
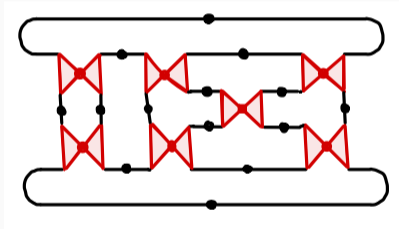
перейдем к зацеплению  $L$ , заменив каждую область скручивания **красной** компонентой.  $L$  называется **аугментацией** для  $K$  и имеет  $t(D)$  красных компонент.

По теореме Терстона о гиперболической хирургии имеем

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) < \text{vol}(S^3 \setminus L).$$

## Схема доказательства Теоремы (шаг 2)

Чтобы получить  $S^3 \setminus L$  как объединение двух копий идеального прямоугольного гиперболического многогранника  $P$ , заменим красные компоненты парами треугольников и стянем черные ребра.



Для получения  $P$  осталось стянуть два черных ребра.  $P$  имеет 21 идеальную вершину и 27 граней.

## Схема доказательства Теоремы 1 (шаг 3)

По теореме Терстона и методу Лакенби - Эгола - Терстона получаем

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) < \text{vol}(S^3 \setminus L) = 2 \text{vol}(P).$$

**Лемма** (В.–Егоров [2024]) Пусть  $P$  – идеальный гиперболический многогранник с  $E$  ребрами и  $p_3$  треугольными гранями. Тогда

$$\text{vol}(P) \leq 2v_{tet} \cdot \left( E - \frac{p_3 + 8}{4} \right).$$

**Следствие** (В.–Егоров [2024]) Пусть  $D$  – диаграмма гиперболического зацепления  $K$ . Пусть  $f_n$  – число светлых  $n$ -угольников в идеальном гиперболическом многограннике, построенном по аугментации  $K$ . Тогда

$$\text{vol}(S^3 \setminus K) \leq (4t(D) - 8)v_{tet} + \sum_{n \geq 3} n f_n \Lambda \left( \frac{\pi}{n} \right).$$

Спасибо за внимание!

`vesnin@math.nsc.ru`