

Нормированные объемы гиперболических узлов и многогранников

Лекция 3: Нормированные объемы многогранников с прямыми двугранными углами

А.Ю. Веснин

ИМ СО РАН, ТГУ, НГУ

Школа "Торическая топология, гиперболическая геометрия и комбинаторная теория групп"

ФТ "Сириус", 17-21 мая 2026 г.

1. Нормированные объемы для гиперболических узлов и многогранников
2. Идеальные прямоугольные многогранники
3. Компактные прямоугольные многогранники
4. Доказательства основных теорем
5. Сравнение спектров и открытые вопросы

Нормированные объемы для гиперболических узлов и многогранников

Нормированный объем гиперболического многогранника

Для гиперболического многогранника \mathcal{P} конечного объема $\text{vol}(\mathcal{P})$ с конечным числом вершин $\text{ver}(\mathcal{P})$ определен¹ нормированный объем по формуле $\omega(\mathcal{P}) = \text{vol}(\mathcal{P})/\text{ver}(\mathcal{P})$.

Пусть \mathcal{R} – некоторое множество гиперболических многогранников. Множество $\Omega(\mathcal{R}) = \{\omega(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathcal{R}\}$ нормированных объемов многогранников из \mathcal{R} будем называть спектром нормированных объемов \mathcal{R} .

Обозначим через \mathcal{R}_{ideal} множество всех идеальных прямоугольных гиперболических многогранников, а через \mathcal{R}_{comp} – множество всех компактных прямоугольных гиперболических многогранников. В обоих случаях мы предполагаем, что многогранники имеют конечный объем и конечное число вершин.

¹A. Vesnin, Volumes and Normalized Volumes of Right-Angled Hyperbolic Polyhedra. Atti Semin. Mat. Fis. Univ. Modena Reggio Emilia 57 (2010), 159–169.

Два важные константы

Объемы многогранников в трехмерном гиперболическом пространстве вычисляются с помощью функции Лобачевского $\Lambda(\theta)$, введенной Милнором в 1982 г.,

$$\Lambda(\theta) = - \int_0^\theta \log |2 \sin t| dt.$$

Ниже мы будем использовать две константы:

$$v_{\text{oct}} = 8\Lambda(\pi/4) \approx 3,663862 \text{ и } v_{\text{tet}} = 3\Lambda(\pi/3) \approx 1,014941.$$

Нормированный объем (плотность объема) узла

Пусть зацепление $L \subset S^3$ гиперболическое, т.е. $S^3 \setminus L$ можно снабдить полной метрикой постоянной отрицательной кривизны. Обозначим $\text{vol}(L) = \text{vol}(S^3 \setminus L)$.

Пусть $c(L)$ – минимальное число перекрестков среди всех диаграмм зацепления L .

Чампанеркар, Кофман и Парселл² ввели плотность объема зацепления по формуле $\text{vd}(L) = \text{vol}(L)/c(L)$. Хорошо известно, что $\text{vd}(L) \leq v_{\text{oct}}$.

Они построили последовательности зацеплений L_n , с $c(L_n) \rightarrow \infty$, таких, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \text{vd}(L_n) = v_{\text{oct}}$.

²A. Champanerkar, I. Kofman, J. S. Purcell, *Geometrically and diagrammatically maximal knots*, J. London Math. Soc. 94:3 (2016), 883–908.

Нормированный объем узла: плотность в интервале

Бартон³: множество плотностей объемов всех гиперболических зацеплений в S^3 всюду плотно в интервале $[0, v_{\text{Oct}}]$.

Адамс, Калдерон и Майер⁴: множество плотностей объемов гиперболических зацеплений в утолщенных поверхностях $S_g \times I$, где $g \geq 2$, всюду плотно в интервале $[0, 2v_{\text{Oct}}]$.

³S. D. Burton, *The spectra of volume and determinant densities of links*, *Topology and its Applications* 211 (2016), 38–55.

⁴C. Adams, A. Calderon, N. Mayer, *Generalized bipyramids and hyperbolic volumes of alternating k -uniform tiling links*, *Topology and its App.* 271 (2020), 107045.

Идеальные прямоугольные многогранники

Теорема Андреева

Теорема. [Андреев, 1970] Прямоугольный абстрактный многогранник (P, \mathcal{E}) реализуется как гиперболический многогранник конечного объема, который мы обозначим через \mathcal{P} , тогда и только тогда, когда выполнены следующие условия:

- (1) P имеет не менее шести граней;
- (2) каждая вершина в P имеет валентность 3 или 4;
- (3) для любых трех граней (F_i, F_j, F_k) в P таких, что $F_i \cap F_j$ и $F_j \cap F_k$ являются ребрами в P с различными концами, выполнено $F_i \cap F_k = \emptyset$;
- (4) P^* не имеет призматических ≤ 4 -обходов.

При этом, каждая 3-валентная вершина в P соответствует конечной вершине в \mathcal{P} , каждая 4-валентная вершина в P соответствует идеальной вершине в \mathcal{P} , и реализация единственна с точностью до изометрии.

Идеальным прямоугольным многогранником мы будем называть такой прямоугольный гиперболический многогранник у которого все вершины являются идеальными.

Число треугольных граней

Обозначим через \mathcal{R}_{ideal} множество всех идеальных прямоугольных гиперболических многогранников,

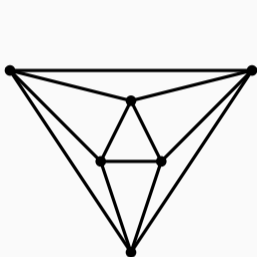
Для многогранника $\mathcal{P} \in \mathcal{R}_{ideal}$ обозначим через F число граней, через V число вершин, а через p_k число k -угольных граней, где $k \geq 3$. Тогда $F = \sum_{k \geq 3} p_k$. Поскольку все вершины многогранника являются 4-валентными, из формулы Эйлера для многогранников следует, что $F = V + 2$, откуда

$$p_3 = 8 + \sum_{k \geq 5} (k - 4)p_k.$$

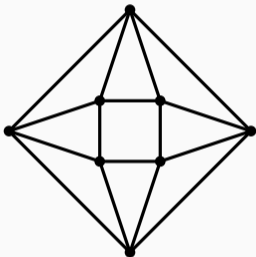
В частности, идеальным прямоугольным многогранником с наименьшим числом граней является октаэдр.

Скручивание ребер

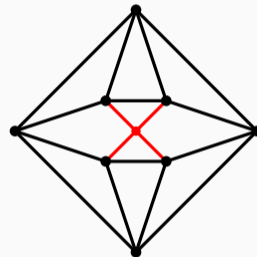
Теорема. [Brinkmann et. al.] Класс многогранников \mathcal{R}_{ideal} порождается антипризмами $\mathcal{A}(n)$, $n \geq 3$, и операциями скручивания ребер.



$A(3)$



$A(4)$



$A(4)^*$

Рис. 1: Антипризмы $A(3)$ и $A(4)$, скрученная антипризма $A(4)^*$.

Граф роста идеальных многогранников

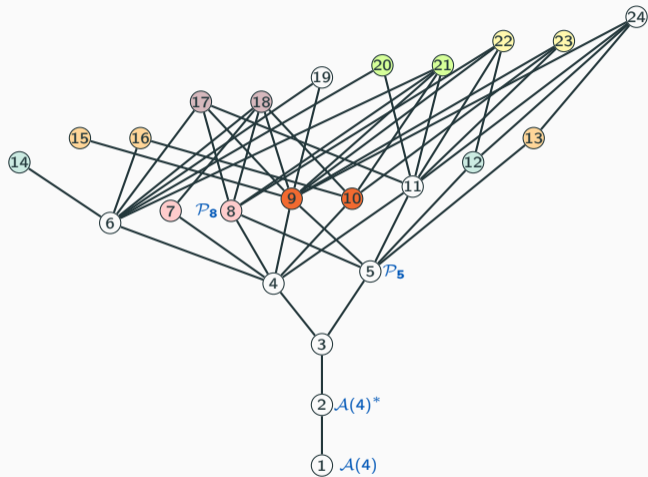


Рис. 2: Начальная часть графа роста многогранников из $\mathcal{A}(4)$.

Идеальные прямоугольные многогранники: равенства объемов

Отметим, что в рамках приближенных расчетов имеют место следующие равенства объемов многогранников, представленных на рис. 2:

$$\begin{aligned} \text{vol}(\mathcal{P}_7) &= \text{vol}(\mathcal{P}_8) = 10,991587; \\ \text{vol}(\mathcal{P}_9) &= \text{vol}(\mathcal{P}_{10}) = 11,136296; \\ \text{vol}(\mathcal{P}_{12}) &= \text{vol}(\mathcal{P}_{14}) = 11,801747; \\ \text{vol}(\mathcal{P}_{13}) &= \text{vol}(\mathcal{P}_{15}) = \text{vol}(\mathcal{P}_{16}) = 12,046092; \\ \text{vol}(\mathcal{P}_{17}) &= \text{vol}(\mathcal{P}_{18}) = 12,276278; \\ \text{vol}(\mathcal{P}_{20}) &= \text{vol}(\mathcal{P}_{21}) = 12,611908; \\ \text{vol}(\mathcal{P}_{22}) &= \text{vol}(\mathcal{P}_{23}) = 12,883862. \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь для каждого объема приведены значения с точностью до шести знаков после запятой. В знаках равенства подразумевается такая точность.

Вопрос. Верно ли, что равенства объемов точные, а многогранники равносоставленные?

Идеальные многогранники: поведение при скручивании

Замечание. При скручивании ребер нормированный объем может как увеличиваться, так и уменьшаться.

Пример: $\omega(\mathcal{A}(4)^*) > \omega(\mathcal{A}(4))$, где $\omega(\mathcal{A}(4)) \approx \frac{6,02}{8} \approx 0,75$, а $\omega(\mathcal{A}(4)^*) \approx \frac{7,32}{9} \approx 0,81$.

Пример: $\omega(\mathcal{P}_5^*) < \omega(\mathcal{P}_5)$, где $\omega(\mathcal{P}_5) \approx \frac{10,14}{11} \approx 0,92$, а $\omega(\mathcal{P}_5^*) = \omega(\mathcal{P}_8) \approx \frac{10,99}{12} \approx 0,91$.

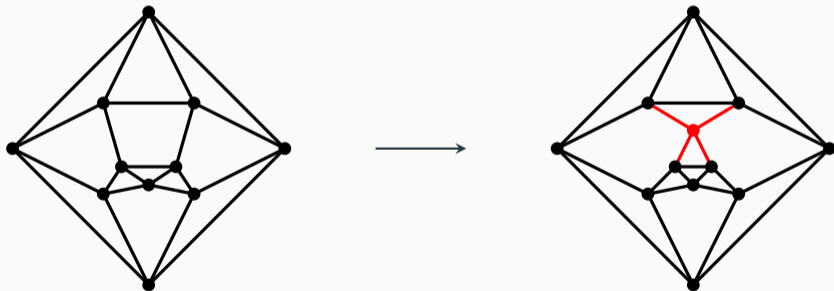


Рис. 3: Многогранники \mathcal{P}_5 и $\mathcal{P}_8 = \mathcal{P}_5^*$.

Таблица нормированных объемов идеальных многогранников

Рассмотрим множество $\mathcal{R}_{ideal}^n = \{\mathcal{P} \in \mathcal{R}_{ideal} \mid \text{ver}(\mathcal{P}) = n\}$. В таблице для $6 \leq n \leq 21$ приведены следующие величины: число элементов $|\mathcal{R}_{ideal}^n|$ в множестве \mathcal{R}_{ideal}^n ; число различных нормированных объемов $|\Omega(\mathcal{R}_{ideal}^n)|$; минимальные $\min \Omega(\mathcal{R}_{ideal}^n)$ и максимальные $\max \Omega(\mathcal{R}_{ideal}^n)$ значения нормированных объемов.

n	$ \mathcal{R}_{ideal}^n $	$ \Omega(\mathcal{R}_{ideal}^n) $	$\min \Omega(\mathcal{R}_{ideal}^n)$	$\max \Omega(\mathcal{R}_{ideal}^n)$
6	1	1	0,610643	0,610643
7	0	0	-	-
8	1	1	0,752880	0,752880
9	1	1	0,814191	0,814191
10	2	2	0,813788	0,861241
11	2	2	0,880628	0,922674
12	9	7	0,845784	1,003841
13	11	7	0,907826	1,026982
14	37	17	0,864735	1,059477
15	79	31	0,920885	1,088771
16	249	79	0,876903	1,129321
17	671	172	0,927656	1,148432
18	2182	495	0,885188	1,180085
19	6692	1359	0,931280	1,204969
20	22131	4276	0,891085	1,229961
21	72405	13031	0,933202	1,248958

Спектр объемов идеальных прямоугольных многогранников

Теорема 1. [В. – Егоров (2026)]

Спектр нормированных объемов идеальных прямоугольных гиперболических многогранников $\Omega(\mathcal{R}_{ideal}) = \{\omega(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathcal{R}_{ideal}\}$ принадлежит интервалу $[\frac{1}{6}V_{oct}, \frac{1}{2}V_{oct}]$, где нижняя граница достигается на октаэдре, а верхняя граница является точной.

Спектр является дискретным на интервале $[\frac{1}{6}V_{oct}, \frac{1}{4}V_{oct})$ и всюду плотным на интервале $[\frac{1}{4}V_{oct}, \frac{1}{2}V_{oct}]$.

А.Ю. Веснин, А.А. Егоров. Спектры нормированных объемов прямоугольных гиперболических многогранников. Сиб. матем. журн. (в печати). Препринтная версия <https://arxiv.org/abs/2605.18558>

Компактные прямоугольные многогранники

Реберная хирургия

Пусть F_1 и F_2 – две различные грани в 3-валентном комбинаторном многограннике \mathcal{P}_0 . Будем говорить, что F_1 и F_2 **соединены ребром**, если они не являются смежными и найдется ребро $e \in \mathcal{P}_0$, соединяющее вершину $v_1 \in \partial F_1$ с вершиной $v_2 \in \partial F_2$.

Ребро e назовем **хорошим**, если e соединяет грани с числом сторон не менее 6, и **очень хорошим**, если оно дополнительно не является частью 5-обхода. **Реберной хирургией** вдоль e назовем удаление e с изменением числа вершин, ребер и граней.

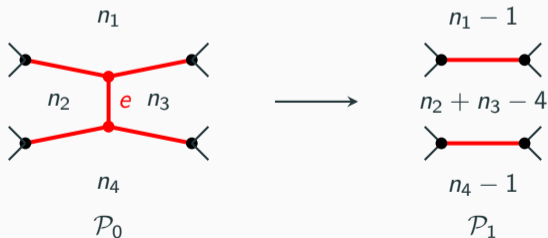


Рис. 4: Реберная хирургия вдоль ребра e .

Реберная хирургия для компактных прямоугольных многогранников

Иноуе⁵: если \mathcal{P}_0 – компактный прямоугольный гиперболический многогранник, а $e \in \mathcal{P}_0$ – очень хорошее ребро, то многогранник \mathcal{P}_1 , полученный хирургией вдоль ребра e , также является компактным прямоугольным гиперболическим, и при этом, $\text{vol}(\mathcal{P}_0) > \text{vol}(\mathcal{P}_1)$.

Обратную операцию будем называть **добавлением ребра e** и обозначать полученный многогранник через $\mathcal{P}^+ = \mathcal{P} \cup \{e\}$. На рисунке многогранник $L(6)^+$, полученный из $L(6)$.

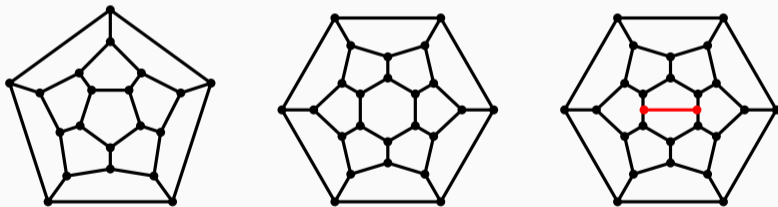


Рис. 5: Додаэдр $L(5)$, многогранник $L(6)$ и многогранник $L(6)^+$.

⁵T. Inoue, *Organizing volumes of right-angled hyperbolic polyhedra*, Algebraic & Geometric Topology, 8 (2008), 1523–1565.

Теорема. [Иноуэ] Пусть \mathcal{P}_0 – компактный прямоугольный гиперболический многогранник. Тогда существует последовательность попарно непересекающихся объединений компактных прямоугольных гиперболических многогранников $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2, \dots, \mathcal{P}_k$ таких, что для $i = 1, \dots, k$, объединение \mathcal{P}_i получено из \mathcal{P}_{i-1} декомпозицией либо реберной хирургией, а \mathcal{P}_k состоит из многогранников Лебелля. Более того,

$$\text{vol}(\mathcal{P}_0) \geq \text{vol}(\mathcal{P}_1) \geq \text{vol}(\mathcal{P}_2) \geq \dots \geq \text{vol}(\mathcal{P}_k).$$

Граф роста компактных многогранников

Номера вершин соответствуют списку Иноуэ⁶ 825 первых многогранников.

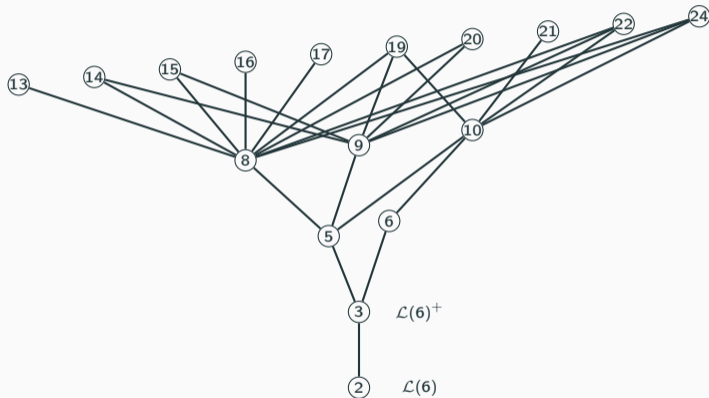


Рис. 6: Начальная часть графа роста многогранников из $\mathcal{L}(6)$.

⁶T. Inoue, *Exploring the list of smallest right-angled hyperbolic polyhedra*, *Experimental Math.*, 31:1 (2022), 165–183

Компактные многогранники: поведение при скручивании

Замечание. При операции добавления ребра нормированный объем может как увеличиваться, так и уменьшаться.

Пример: $\omega(\mathcal{L}(6)^+) > \omega(\mathcal{L}(6))$, где $\omega(\mathcal{L}(6)) \approx \frac{6,02}{24} \approx 0,25$, а $\omega(\mathcal{L}(6)^+) \approx \frac{6,96}{26} \approx 0,26$.

Пример: $\omega(\mathcal{Q}) > \omega(\mathcal{Q}^+)$, где $\omega(\mathcal{Q}) \approx \frac{12,71}{42} \approx 0,30$, а $\omega(\mathcal{Q}^+) \approx \frac{12,99}{44} \approx 0,29$.

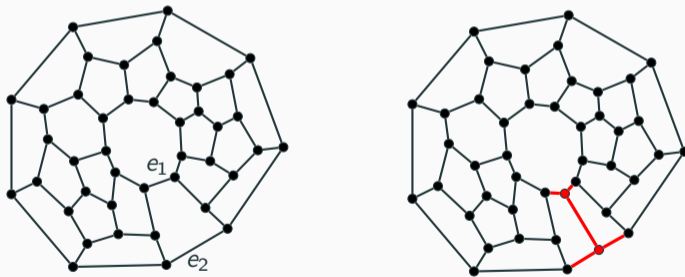


Рис. 7: Многогранники \mathcal{Q} и \mathcal{Q}^+ .

Таблица нормированных объемов компактных многогранников

Рассмотрим множество $\mathcal{R}_{comp}^n = \{\mathcal{P} \in \mathcal{R}_{comp} \mid \text{ver}(\mathcal{P}) = n\}$. В таблице для четных $20 \leq n \leq 46$ приведены следующие величины: число элементов $|\mathcal{R}_{comp}^n|$ в множестве \mathcal{R}_{comp}^n , число различных нормированных объемов $|\Omega(\mathcal{R}_{comp}^n)|$, а также минимальные $\min \Omega(\mathcal{R}_{comp}^n)$ и максимальные $\max \Omega(\mathcal{R}_{comp}^n)$ значения нормированных объемов.

n	$ \mathcal{R}_{comp}^n $	$ \Omega(\mathcal{R}_{comp}^n) $	$\min \Omega(\mathcal{R}_{comp}^n)$	$\max \Omega(\mathcal{R}_{comp}^n)$
20	1	1	0,215310	0,215310
22	0	0	-	-
24	1	1	0,250960	0,250960
26	1	1	0,267961	0,267961
28	3	3	0,270116	0,285722
30	4	4	0,287080	0,298220
32	12	12	0,281845	0,311786
34	23	23	0,286201	0,323119
36	71	71	0,289334	0,335671
38	187	187	0,291020	0,345760
40	627	627	0,292711	0,355566
42	1970	1952	0,294115	0,364289
44	6833	6771	0,295366	0,372678
46	23384	23082	0,296473	0,380143

Спектр объемов компактных прямоугольных многогранников

Теорема 2. [В. – Егоров (2026)]

Спектр нормированных объемов компактных прямоугольных гиперболических многогранников $\Omega(\mathcal{R}_{comp}) = \{\omega(\mathcal{P}) \mid \mathcal{P} \in \mathcal{R}_{comp}\}$ принадлежит интервалу $\left[\frac{5}{192}V_{oct}, \frac{5}{8}V_{tet}\right)$, где верхняя граница является точной.

На интервале $\left[\frac{5}{192}V_{oct}, \frac{1}{32}V_{oct}\right)$ спектр является дискретным, а на интервале $\left[\frac{5}{16}V_{tet}, \frac{5}{8}V_{tet}\right]$ – всюду плотным.

А.Ю. Веснин, А.А. Егоров. Спектры нормированных объемов прямоугольных гиперболических многогранников. Сиб. матем. журн. (в печати). Препринтная версия <https://arxiv.org/abs/2605.18558>

Доказательства основных теорем

Схема доказательства теоремы 1. (1)

Установим, что $\Omega(\mathcal{R}_{ideal}) \subset [\frac{1}{6}v_{oct}, \frac{1}{2}v_{oct})$, нижняя граница достигается на октаэдре, а верхняя граница точна. Из теоремы Аткинсона следует, что

$$\frac{v_{oct}}{4} \frac{\text{ver}(\mathcal{P}) - 2}{\text{ver}(\mathcal{P})} \leq \omega(\mathcal{P}) \leq \frac{v_{oct}}{2} \frac{\text{ver}(\mathcal{P}) - 4}{\text{ver}(\mathcal{P})},$$

где $\omega(\mathcal{P}) = \text{vol}(\mathcal{P})/\text{ver}(\mathcal{P})$ и $\text{ver}(\mathcal{P}) \geq 6$.

Нижняя оценка. Поскольку при $N \geq 6$ функция $f(N) = \frac{N-2}{N}$ монотонно возрастает, то $\min_{N \geq 6} f(N) = f(6) = \frac{2}{3}$, откуда $\omega(\mathcal{P}) \geq \frac{1}{6}v_{oct}$ и равенство достигается на октаэдре.

Верхняя оценка. При $N \geq 6$ функция $g(N) = \frac{N-4}{N}$ монотонно возрастает и стремится к 1 при $N \rightarrow \infty$, следовательно, если $\text{ver}(\mathcal{P}) \geq 6$, то имеет место неравенство $\omega(\mathcal{P}) < \frac{1}{2}v_{oct}$.

По теореме Аткинсона верхняя оценка в неравенстве является асимптотически точной. Значит, верхняя граница спектра равна $\frac{1}{2}v_{oct}$, но она не достигается.

Схема доказательства теоремы 1. (2)

Покажем, что на интервале $[\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, \frac{1}{4}v_{\text{oct}})$ спектр является дискретным. В самом деле, для произвольного $\frac{1}{6}v_{\text{oct}} < C < \frac{1}{4}v_{\text{oct}}$ рассмотрим интервал $[\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, C]$. Предположим, что $\omega(\mathcal{P}) \in [\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, C]$. Тогда из нижней оценки в неравенстве имеем:

$$\frac{v_{\text{oct}}}{4} \left(1 - \frac{2}{\text{ver}(\mathcal{P})} \right) \leq \omega(\mathcal{P}) \leq C.$$

Отсюда следует, что

$$1 - \frac{2}{\text{ver}(\mathcal{P})} \leq \frac{4C}{v_{\text{oct}}} \quad \text{и далее,} \quad \text{ver}(\mathcal{P}) \leq \frac{2v_{\text{oct}}}{v_{\text{oct}} - 4C}.$$

В силу выбора C , выражение в правой части неравенства положительно. Получили, что число вершин $\text{ver}(\mathcal{P})$ ограничено сверху величиной, зависящей только от C .

Схема доказательства теоремы 1. (3)

Напомним, что идеальный прямоугольного гиперболический многогранник однозначно с точностью до изометрии задается своим 1-скелетом, который является 3-связным планарным 4-валентным графом.

Поскольку число таких графов с заданным числом вершин конечно, то множество значений объемов (а значит, и нормированных объемов) также конечно. Таким образом, в любом интервале $[\frac{1}{6}v_{\text{Oct}}, C]$, где $C < \frac{1}{4}v_{\text{Oct}}$, содержится лишь конечное число значений спектра. Следовательно, спектр дискретен на интервале $[\frac{1}{6}v_{\text{Oct}}, \frac{1}{4}v_{\text{Oct}})$.

Схема доказательства теоремы 1. (4)

Покажем, что спектр нормированных объемов всюду плотен на отрезке $[\frac{1}{4}v_{\text{Oct}}, \frac{1}{2}v_{\text{Oct}}]$.

Для удобства изложения введем вспомогательные величины. Для $\mathcal{P} \in \mathcal{R}_{\text{ideal}}$ определим модифицированное число вершин $\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P})$ по формуле $\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}) = \text{ver}(\mathcal{P}) - 3$, а также, определим модифицированный нормированный объем $\widetilde{\omega}(\mathcal{P})$ полагая:

$$\widetilde{\omega}(\mathcal{P}) = \frac{\text{vol}(\mathcal{P})}{\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P})}.$$

Известно, что каждый многогранник из $\mathcal{R}_{\text{ideal}}$ имеет не менее восьми треугольных граней. При этом, любые два идеальных треугольника изометричны друг другу.

Значит, определена операция **связной суммы**, т.е. геометрической склейки двух идеальных прямоугольных многогранников вдоль их треугольных граней. Пусть $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathcal{R}_{\text{ideal}}$. Выберем треугольные грани $T_1 \subset \mathcal{P}_1$ и $T_2 \subset \mathcal{P}_2$. Поскольку T_1 и T_2 изометричны, мы можем склеить \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 вдоль этих граней. Обозначим полученный многогранник через $\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2$.

Схема доказательства теоремы 1. (5)

Лемма. При операции связной суммы идеальных прямоугольных многогранников вдоль треугольных граней объем ведет себя аддитивно:

$$\text{vol}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \text{vol}(\mathcal{P}_1) + \text{vol}(\mathcal{P}_2),$$

а число вершин изменяется следующим образом:

$$\text{ver}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \text{ver}(\mathcal{P}_1) + \text{ver}(\mathcal{P}_2) - 3.$$

При этом, многогранник $\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2$ является идеальным прямоугольным.

Схема доказательства теоремы 1. (6)

Заметим, что при операции связной суммы модифицированное число вершин ведет себя аддитивно:

$$\begin{aligned}\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) &= (\text{ver}(\mathcal{P}_1) + \text{ver}(\mathcal{P}_2) - 3) - 3 \\ &= (\text{ver}(\mathcal{P}_1) - 3) + (\text{ver}(\mathcal{P}_2) - 3) = \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) + \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2).\end{aligned}$$

Вычислим модифицированный нормированный объем связной суммы:

$$\widetilde{\omega}(\mathcal{P}_1 \# \mathcal{P}_2) = \frac{\text{vol}(\mathcal{P}_1) + \text{vol}(\mathcal{P}_2)}{\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) + \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2)} = \frac{\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) \cdot \widetilde{\omega}(\mathcal{P}_1) + \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2) \cdot \widetilde{\omega}(\mathcal{P}_2)}{\widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) + \widetilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2)}.$$

Таким образом, величина $\widetilde{\omega}$ для связной суммы многогранников ведет себя как взвешенное среднее значений $\widetilde{\omega}$ слагаемых, где весами выступают модифицированные числа вершин.

Схема доказательства теоремы 1. (7)

Рассмотрим последовательность многогранников $\#_k \mathcal{P}$, полученную последовательным склеиванием $k \geq 1$ копий одного и того же многогранника \mathcal{P} . Очевидно, что $\tilde{\omega}(\#_k \mathcal{P}) = \tilde{\omega}(\mathcal{P})$. Заметим, что

$$\omega(\#_k \mathcal{P}) = \frac{\text{vol}(\#_k \mathcal{P})}{\text{ver}(\#_k \mathcal{P})} = \frac{\text{vol}(\#_k \mathcal{P})}{\tilde{\text{ver}}(\#_k \mathcal{P}) + 3} = \tilde{\omega}(\#_k \mathcal{P}) \cdot \frac{\tilde{\text{ver}}(\#_k \mathcal{P})}{\tilde{\text{ver}}(\#_k \mathcal{P}) + 3}.$$

Поскольку $\tilde{\text{ver}}(\#_k \mathcal{P}) = k \cdot \tilde{\text{ver}}(\mathcal{P}) \rightarrow \infty$ при $k \rightarrow \infty$, дробь справа стремится к 1. Таким образом,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \omega(\#_k \mathcal{P}) = \tilde{\omega}(\#_k \mathcal{P}) = \tilde{\omega}(\mathcal{P}).$$

Значит, чтобы аппроксимировать произвольное значение в интервале $[\frac{1}{4} v_{\text{Oct}}, \frac{1}{2} v_{\text{Oct}}]$ нормированными объемами, достаточно аппроксимировать его модифицированными нормированными объемами.

Схема доказательства теоремы 1. (8)

Пусть для многогранников $\mathcal{P}_1, \mathcal{P}_2 \in \mathcal{R}_{ideal}$ модифицированные объемы равны $\tilde{\omega}(\mathcal{P}_1) = A$ и $\tilde{\omega}(\mathcal{P}_2) = B$. Можем считать, что $A < B$. Покажем как построить последовательность многогранников таких, чтобы их нормированные объемы сходились к произвольному значению на интервале (A, B) . Обозначим через $\#_k \mathcal{P}_1 \#_m \mathcal{P}_2$ многогранник, полученный связной суммой k копий \mathcal{P}_1 и m копий \mathcal{P}_2 вдоль треугольных граней. Получаем

$$\tilde{\omega}(\#_k \mathcal{P}_1 \#_m \mathcal{P}_2) = \frac{k \cdot \tilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) \cdot A + m \cdot \tilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2) \cdot B}{k \cdot \tilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1) + m \cdot \tilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2)}.$$

Для произвольного $\alpha \in (0, 1)$ выберем последовательности таких целых чисел $\{k_i\}$ и $\{m_i\}$, что $(k_i, m_i) = 1$ и

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{k_i}{m_i} = \frac{\alpha \cdot \tilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_2)}{(1 - \alpha) \cdot \tilde{\text{ver}}(\mathcal{P}_1)}.$$

Схема доказательства теоремы 1. (9)

Тогда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\omega}(\#_{k_i} \mathcal{P}_1 \#_{m_i} \mathcal{P}_2) = \alpha \cdot A + (1 - \alpha) \cdot B.$$

Следовательно, множество значений $\tilde{\omega}$ плотно в интервале между любыми двумя значениями $\tilde{\omega}(\mathcal{P}_1)$ и $\tilde{\omega}(\mathcal{P}_2)$.

Чтобы доказать плотность нормированных объемов на интервале $[\frac{1}{4} v_{\text{oct}}, \frac{1}{2} v_{\text{oct}}]$ воспользуемся идеальными прямоугольными n -антипризмами $\mathcal{A}(n)$. Из формулы Терстона для их объемов имеем, что при $n \rightarrow \infty$:

$$\text{vol}(\mathcal{A}(n)) \sim \frac{v_{\text{oct}}}{2} n.$$

При этом $\tilde{\text{ver}}(\mathcal{A}(n)) = (2n + 2) - 3 = 2n - 1 \sim 2n$. Следовательно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \tilde{\omega}(\mathcal{A}(n)) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\frac{v_{\text{oct}}}{2} n}{2n} = \frac{v_{\text{oct}}}{4}.$$

Схема доказательства теоремы 1. (10)

Таким образом, во-первых, найдется антипризма $\mathcal{A}(n)$ со значением $\tilde{\omega}(\mathcal{A}(n))$, сколь угодно близким к $\frac{1}{4}v_{\text{oct}}$. Во-вторых согласно теореме Аткинсона существует последовательность многогранников $\{Q_i\}$, для которой $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\text{vol}(Q_i)}{\text{ver}(Q_i)} = \frac{1}{2}v_{\text{oct}}$ и следовательно, $\lim_{i \rightarrow \infty} \tilde{\omega}(Q_i) = \frac{1}{2}v_{\text{oct}}$.

Для сколь угодно малого ε выберем в качестве $\mathcal{P}_{1,\varepsilon}$ многогранник $\mathcal{A}(n_\varepsilon)$ для которого $|\tilde{\omega}(\mathcal{A}(n_\varepsilon)) - \frac{1}{4}v_{\text{oct}}| < \varepsilon$, а в качестве $\mathcal{P}_{2,\varepsilon}$ выберем многогранник Q_{i_ε} из теоремы Аткинсона для которого $|\frac{1}{2}v_{\text{oct}} - \tilde{\omega}(Q_{i_\varepsilon})| < \varepsilon$. Применяя к многогранникам $\mathcal{P}_{1,\varepsilon}$ и $\mathcal{P}_{2,\varepsilon}$ те же рассуждения, что выше мы применяли к многогранникам \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 , получаем, что нормированный объем всюду плотен на интервале $(\frac{1}{4}v_{\text{oct}} + \varepsilon, \frac{1}{2}v_{\text{oct}} - \varepsilon)$. Таким образом нормированный объем всюду плотен на отрезке $[\frac{1}{4}v_{\text{oct}}, \frac{1}{2}v_{\text{oct}}]$. Теорема 1 доказана.

Схема доказательства теоремы 2.

Аналогично доказательству теоремы 1 с заменой треугольников на пятиугольники и использованием башен $\mathcal{L}_k(n)$ из многогранников Лебелля.

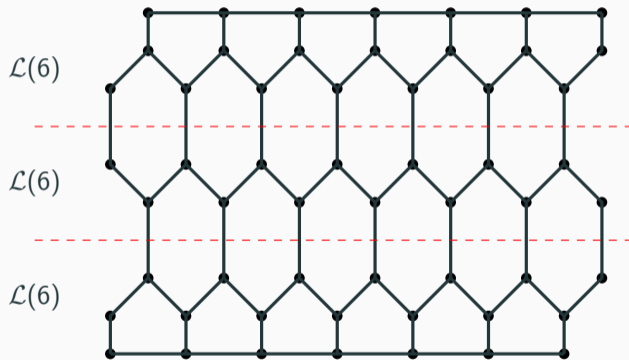
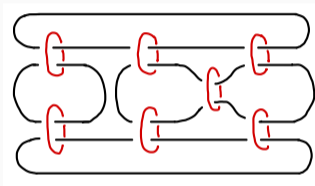
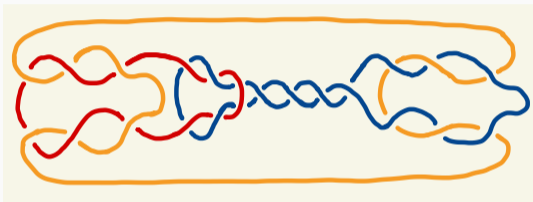


Рис. 8: Боковая поверхность многогранника $\mathcal{L}_3(6)$.

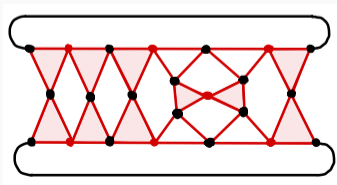
Сравнение спектров и открытые вопросы

Аугментированные зацепления и многогранники

На предыдущей лекции мы обсуждали переход от произвольного узла к аугментированному зацеплению



и далее, к идеальному прямоугольному многограннику:



Аугментированные зацепления

Известно, что дополнение к любому полностью аугментированному гиперболическому зацеплению $L \subset S^3$ можно разрезать на два изометричных друг другу идеальных прямоугольных многогранника \mathcal{P} . При этом выполняются соотношения $\text{vol}(L) = 2\text{vol}(\mathcal{P})$ и $\text{ver}(\mathcal{P}) = 3a(L)$, где $a(L)$ – число аугментаций (вертикальных компонент) зацепления.

Квон и Тхам⁷ ввели понятие спектра плотности объема $\text{vd}(L) = \text{vol}(L)/a(L)$ для полностью аугментированного зацепления L . Эту величину можно пересчитать через нормированный объем многогранника \mathcal{P} :

$$\text{vd}(L) = \frac{2\text{vol}(\mathcal{P})}{\text{ver}(\mathcal{P})/3} = 6 \frac{\text{vol}(\mathcal{P})}{\text{ver}(\mathcal{P})} = 6\omega(\mathcal{P}).$$

Из их результатов следует, что для подкласса многогранников, соответствующих полностью аугментированным зацеплениям, спектр лежит в интервале $[\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, \frac{5}{3}v_{\text{tet}}]$, дискретен в $[\frac{1}{6}v_{\text{oct}}, \frac{1}{3}v_{\text{oct}})$ и всюду плотен в $[\frac{1}{3}v_{\text{oct}}, \frac{5}{3}v_{\text{tet}}]$.

⁷ A. Kwon, Y. H. Tham, *On the volume density spectrum of fully augmented links*, JKTR 34:05 (2025)

Сравнение спектров нормированных объемов

Части спектра: синяя – дискретная, розовая – всюду плотная, желтая – неизученная.

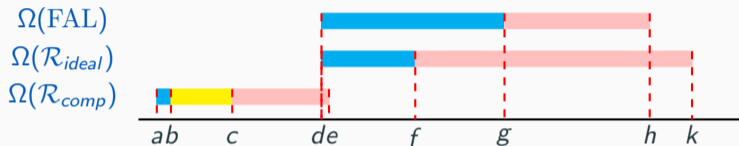


Рис. 9: Сравнение спектров нормированных объемов.

Значения на горизонтальной оси:

$$\begin{aligned} a &= \frac{5}{192} v_{\text{oct}} = 0,068697, & b &= \frac{1}{32} v_{\text{oct}} = 0,114495, & c &= \frac{5}{16} v_{\text{tet}} = 0,317169, \\ d &= \frac{1}{6} v_{\text{oct}} = 0,610643, & e &= \frac{5}{8} v_{\text{tet}} = 0,634338, & f &= \frac{1}{4} v_{\text{oct}} = 0,915965, \\ g &= \frac{1}{3} v_{\text{oct}} = 1,221287, & h &= \frac{5}{3} v_{\text{tet}} = 1,691558, & k &= \frac{1}{2} v_{\text{oct}} = 1,831931. \end{aligned}$$

Вопрос 1. Какова точная нижняя граница спектра $\Omega(\mathcal{R}_{comp})$? Указанная в данной работе граница $a = \frac{5}{192} v_{oct}$ не является точной.

Вопрос 2. Какова структура спектра $\Omega(\mathcal{R}_{comp})$ в интервале $[b, c] = \left[\frac{1}{32} v_{oct}, \frac{5}{16} v_{tet}\right]$?

Гипотеза 1. Спектр $\Omega(\mathcal{R}_{comp})$ лежит в интервале $\left[\frac{volR(5)}{20}, \frac{5}{8} v_{tet}\right]$, причем обе границы точны. При этом, спектр дискретен в $\left[\frac{volR(5)}{20}, \frac{5}{16} v_{tet}\right]$ и всюду плотен в $\left[\frac{5}{16} v_{tet}, \frac{5}{8} v_{tet}\right]$.

Вопрос 3. Как устроен спектр нормированных объемов прямоугольных гиперболических многогранников, допускающих как конечные, так и идеальные вершины?

Открытые вопросы

Объемы многогранников $\mathcal{A}(4)$ и $\mathcal{L}(6)$, вычисленные с точностью до 50 знаков после запятой, совпадают и равны

6, 02304602004718882363418931461679711549802902472249 ...

Верно ли, что имеет место равенство $\text{vol}(\mathcal{A}(4)) = \text{vol}(\mathcal{L}(6))$?

Поскольку оба объема выражаются через функцию Лобачевского, этот вопрос сводится к вопросу о том, имеет ли место следующее равенство:

$$3 \left[2\Lambda(\theta_6) + \Lambda\left(\theta_6 + \frac{\pi}{6}\right) + \Lambda\left(\theta_6 - \frac{\pi}{6}\right) + \Lambda\left(\frac{\pi}{2} - 2\theta_6\right) \right] = 8\Lambda\left(\frac{3\pi}{8}\right) + 8\Lambda\left(\frac{\pi}{8}\right), \quad (2)$$

где $\theta_6 = \frac{\pi}{2} - \arccos\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$?

Вопрос 4. Имеет ли место равенство (2)?

Спасибо за внимание!

`vesnin@math.nsc.ru`