

Неравенство Коши.

Для любых неотрицательных чисел $a_1, a_2, \dots, a_n$ их среднее арифметическое не меньше их среднего геометрического:

$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}$, причем равенство достигается тогда и только тогда, когда $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

1. Доказательство для трех неотрицательных чисел:

Рассмотрим числа $a, b, c, \frac{a+b+c}{3}$ и запишем для этих четырех чисел

неравенство Коши. Получим $\frac{a+b+c+\frac{a+b+c}{3}}{4} \geq \sqrt[4]{abc \cdot \frac{a+b+c}{3}}$. Возведем обе

части в 4 степень, предварительно упростив левую часть:

$$\left(\frac{a+b+c}{3}\right)^4 \geq abc \cdot \left(\frac{a+b+c}{3}\right). \text{ Доказано.}$$

2. Докажем, что среднее гармоническое положительных чисел не больше среднего геометрического:

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \leq \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}.$$

Запишем неравенство Коши для положительных чисел $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \dots, \frac{1}{a_n}$

$$\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}}{n} \geq \sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \frac{1}{a_2} \cdot \dots \cdot \frac{1}{a_n}} = \frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}}.$$

Неравенство Коши-Буняковского.

$\forall a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1, b_2, \dots, b_n$:

$$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq (a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)^2.$$

1. Доказательство: Очевидно, что $(a_1 x + b_1)^2 + (a_2 x + b_2)^2 + \dots + (a_n x + b_n)^2 \geq 0$ для любого x . Раскроем скобки и получим квадратный трехчлен, который неотрицателен для любого значения x .

$(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)x^2 + 2(a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n)x + (b_1^2 + b_2^2 + \dots + b_n^2) \geq 0$. Старший коэффициент неотрицательный, поэтому его дискриминант будет неположительным. Доказано.

2. Дайте геометрическую (векторную) интерпретацию неравенства Коши-Буняковского чисел a_1, a_2 и b_1, b_2 .

Рассмотрим вектора $\vec{p} = \{a_1; a_2\}$ $\vec{q} = \{b_1; b_2\}$. Их скалярное

произведение равно $\vec{p} \cdot \vec{q} = |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| \cos(\widehat{p, q}) = a_1 b_1 + a_2 b_2$.

Поскольку косинус любого угла не превосходит 1, то

$$a_1 b_1 + a_2 b_2 \leq |\vec{p}| \cdot |\vec{q}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \cdot \sqrt{b_1^2 + b_2^2}.$$

3. Запишем неравенство Коши-Буняковского для произвольных $a_1, a_2, \dots, a_n$ и $b_1 = b_2 = \dots = b_n = 1$. Получим $(a_1^2 + a_2^2 + \dots + a_n^2)n \geq (a_1 + a_2 + \dots + a_n)^2$. Разделив обе части неравенства на n^2 и взяв квадратный корень от обеих неотрицательных частей неравенства, завершим доказательство.

4. Решить уравнение: $2\sqrt{x+7} + 3\sqrt{37-2x} + 6\sqrt{3x+93} = 7\sqrt{2x+137}$.

Пусть $a_1 = 2, a_2 = 3, a_3 = 6$ и $b_1 = \sqrt{x+7}, b_2 = \sqrt{37-2x}, b_3 = \sqrt{3x+93}$. Запишем неравенство Коши – Буняковского для трех пар чисел. Поскольку все входящие числа неотрицательные, мы можем взять квадратный корень от правой и левой части неравенства. Заметим, что $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 49$ и $b_1^2 + b_2^2 + b_3^2 = 2x + 137$. Поэтому неравенство должно выполняться со знаком равенства. Следовательно косинус угла между векторами равен 1, а сам угол 0, то есть вектора коллинеарны, а их координаты пропорциональны.

Получаем систему уравнений
$$\begin{cases} \sqrt{x+7} = 2k, \\ \sqrt{37-2x} = 3k, \\ \sqrt{3x+93} = 6k. \end{cases}$$
 Здесь k – положительный

коэффициент пропорциональности. Система имеет единственное решение $(x; k) = (5; \sqrt{3})$. Таким образом, $x = 5$ единственный корень данного уравнения.