

Неравенства -2. Неравенства для отбора корней и проверки условий.

Иррациональные неравенства. Показательные и логарифмические неравенства.

Неравенства, которые служат для отбора корней уравнений.

- 1) а) Решите уравнение $(-2 \cos^2 x + \sin x + 1) \cdot \log_{0,5}(-0,8 \cos x) = 0$.
 б) Найдите все корни уравнения, принадлежащие промежутку $[-6\pi; -2\pi]$.
- 2) Решите уравнения: а) $\sin(\pi\sqrt{8-x^2}) = 0,5$; б) $\operatorname{tg} x \sqrt{\sin x - 2\cos x - 1} = 0$

Иррациональные неравенства.

$\sqrt{f(x)} > g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) < 0 \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) > g^2(x) \end{cases}$	$\sqrt{f(x)} < g(x) \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g^2(x) \\ f(x) \geq 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} > \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > g(x) \\ g(x) \geq 0 \end{cases}$	$\sqrt{f(x)} < \sqrt{g(x)} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < g(x) \\ f(x) \geq 0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} \cdot g(x) \geq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \geq 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$	$\sqrt{f(x)} \cdot g(x) \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) \geq 0 \\ g(x) \leq 0 \\ f(x) = 0 \end{cases}$
$\sqrt{f(x)} \cdot g(x) > 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) > 0 \end{cases}$	$\sqrt{f(x)} \cdot g(x) < 0 \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 0 \\ g(x) < 0 \end{cases}$

- 1) Решите неравенство: $x\sqrt{10-x^2} > x^2 - 6$.
- 2) Решите неравенство: $(x-3)\sqrt{x^2+x-2} \geq 0$.
- 3) Решите неравенство: $\frac{3-x}{\sqrt{15-x}} < 1$.
- 4) Решите неравенство: $\sqrt{x+6} < \sqrt{x+7} + \sqrt{2x-5}$.
- 5) Решите неравенство: $\left(1 + \frac{1}{\sqrt{x}}\right) \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{2-x}}\right) \cdot (\sqrt{x} + \sqrt{2-x}) \leq 8$.

Показательные неравенства

$$\begin{cases} a^{f(x)} > a^{\varphi(x)} \\ a > 0; a \neq 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > \varphi(x) \\ a > 1 \\ f(x) < \varphi(x) \\ 0 < a < 1 \end{cases}$$

- 6) Решите неравенство: $5^{2x+1} + 6^{x+1} > 30 + 5^x \cdot 30^x$.
- 7) Решите неравенство: $\frac{6-3^{x+1}}{x} > \frac{10}{2x-1}$.

Показательно-степенные неравенства.

Определение. Функция вида: $y = f(x)^{\varphi(x)}$, где $f(x) > 0$, называется **показательно-степенной**.

Показательно-степенные неравенства.

$$\begin{cases} f(x)^{\varphi(x)} > f(x)^{g(x)} \\ f(x) > 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) > 1 \\ \varphi(x) > g(x) \\ 0 < f(x) < 1 \\ \varphi(x) < g(x) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) = 1 \\ \forall x: \exists \varphi(x), \exists g(x) \\ f(x) > 1 \\ \varphi(x) \geq g(x) \\ 0 < f(x) < 1 \\ \varphi(x) \leq g(x) \end{cases}$$

- 8) Решите неравенство: $(x^2 + x + 1)^{\frac{x+5}{x+2}} \geq (x^2 + x + 1)^3$.

Логарифмические неравенства

$$\log_a f(x) < b \Leftrightarrow \begin{cases} f(x) < a^b \\ f(x) > 0 \\ a > 1 \\ 0 < a < 1 \\ f(x) > a^b \end{cases} \cdot \log_{f(x)} g(x) > \log_{f(x)} \varphi(x) \Leftrightarrow \begin{cases} g(x) > \varphi(x) \\ f(x) > 1 \\ \varphi(x) > 0 \\ g(x) < \varphi(x) \\ 0 < f(x) < 1 \\ g(x) > 0 \end{cases}$$

- 9) Решите неравенство: $\log_x(3x-1) > 0$.
- 10) Решите неравенство: $\log_{\sqrt{7}}(1-|x-2|) < \log_{\sqrt{2}+\sqrt{5}}(4x-x^2-2)$.
- 11) Решите неравенство: $\log_2(x-3) + \log_3(20-x) + \sqrt[6]{x-6} + \sqrt[10]{10-x} > 3$.