

Неравенства – 3.

Решение неравенств методом замены множителей

(методом рационализации).

Утверждение 2. Если функция $f(x)$ - строго убывающая, то для любых двух значений t_1 и t_2 из области определения функции разность $(t_1 - t_2)$ совпадает по знаку с разностью $f(t_2) - f(t_1)$.

$$\text{Утв. 2: } f \searrow \Leftrightarrow \left(t_1 - t_2 \overset{\text{одз}}{\leftrightarrow} f(t_2) - f(t_1) \right).$$

Доказательство. Пусть $t_1 < t_2$, тогда $t_1 - t_2 < 0$. По определению убывающей функции $f(t_2) < f(t_1)$ или $f(t_2) - f(t_1) < 0$. Если $t_1 > t_2$, то и $t_1 - t_2 > 0$, и $f(t_2) - f(t_1) > 0$. В обоих случаях знаки соответствующих разностей совпадают.

1. Решите неравенство:

$$(|x - 1| - 4) \cdot (|x + 5| - 1) \cdot (|x - 3| - 7) \geq 0.$$

2. Решите неравенство:

$$(\sqrt{x^2 - 5x + 7} - \sqrt{|x - 4|}) \cdot (\sqrt{|x - 6|} - \sqrt{x^2 - 4x + 6}) < 0.$$

3. Решите неравенство:

$$\frac{(|x - 2| - 4 - x^2) \cdot (|x + 4| - \sqrt{x^2 - x - 2})}{(|1 - x| - 4) \cdot (|3 + x| - |x - 5|)} > 0$$

4. Решите неравенства: $\log_{x^2}(3 - 2x) > 1$.

5. Решите неравенство:

$$(4^{|x-5|} - 64) \cdot (\log_{|x-3|}(x^2 + 12) - \log_{|x-3|}|8x|) \leq 0.$$

6. Решите неравенство:

$$\frac{(x^2 + x) \cdot \log_{x+2}(x+1) \cdot \log_7(x-2)^2}{2x^2 + 5x + 2} \leq 0.$$

7. Решите неравенство:

$$\frac{(|x + 4| - \sqrt{x^2 - x - 2}) \cdot (|x - 2| - 4 - x^2) \cdot (\log_{x^2}(3 - 2x) - 1)}{(|1 - x| - 4) \cdot (|3 + x| - |x - 5|)} > 0.$$

8. Решите неравенство самостоятельно:

$$\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}(10x^2 + x - 2) \leq 0.$$

9. Решите неравенство самостоятельно:

$$\frac{(8 - x^3) \cdot (2^x - 1) \cdot (\sqrt{x + 20} - \sqrt{2x + 30}) \cdot (|x - 2| - 4 - x^2)}{(|x|^{2x-1} - |x|^{5-x})} < 0$$

10. Решите неравенство самостоятельно:

$$\frac{(8 - x^3) \cdot (2^x - 1) \cdot (\sqrt{x + 20} - \sqrt{2x + 30}) \cdot (|x - 2| - 4 - x^2)}{(|x|^{2x-1} - |x|^{5-x}) \cdot (\log_{x+20}(12 - |x|) - \log_{x+20}(20 - 2|x|)) \cdot \log_5^3 x^2} < 0$$