Семинар учителей математики

Движения и композиции движений

Барышев Игорь Николаевич

Матфак ВШЭ

Школа 2101

Движения

Центральной симметрией относительно точки O называется преобразование, которое каждой точке A ставит в соответствие точку A' такую, что $AO = A'O$ и точки AOA' лежат на одной прямой.
Обозначение: Z_O.
Теорема Центральная симметрия является движением.
Замечание
1) Обратным движением к центральной симметрии является та же самая центральная симметрия, то есть $Z_O \circ Z_O = E$, где E - тождественное движение.
2) Неподвижной точкой при центральной симметрии является центр симметрии.
3) Неподвижными прямыми являются все прямые, проходящие через центр симметрии.
4) Произвольная прямая при центральной симметрии переходит в параллельную прямую(или остается на месте).

Поворотом вокруг точки O на угол α называется преобразование плоскости, переводящее каждую точку A в такую точку A', что $OA = OA'$ и угол между лучами OA и OA' (т. е. угол, отсчитываемый против часовой стрелки от луча OA к лучу OA') равен α. Если угол α отрицательный, то поворот будет по часовой стрелке.
Обозначение: R_O^α

Теорема

Поворот является движением.

Замечание

1) Обратным движением к повороту R_O^α является поворот $R_O^{360^\circ-\alpha}$ или $R_O^{-\alpha}$.

2) Неподвижной точкой при повороте является центр поворота.

3) Неподвижных прямых при повороте на произвольный угол нет.

Параллельным переносом на вектор $\overrightarrow{a}$ называется преобразование плоскости, которое каждую точку A переводит в такую точку A', что $\overrightarrow{AA'} = \overrightarrow{a}$. То, что параллельный перенос является движением, очевидно. Если точки A, B переходят соответственно в A', B', то из определения следует, что $AA'B'B$ — параллелограмм и $AB = A'B'$. Обозначение: $T_{\overrightarrow{a}}$.

Замечание

1) Преобразование, обратное к параллельному переносу на вектор $\overrightarrow{a}$ есть параллельный перенос на вектор $-\overrightarrow{a}$.
2) Неподвижных точек при параллельном переносе нет
3) Неподвижными прямыми при параллельном переносе являются прямые, параллельные вектору переноса
4) При параллельном переносе прямая переходит в параллельную ей (или остается на месте).

Осевой симмметрией относительно прямой l называется преобразование плоскости, которое каждой точке A, не лежащей на l, ставит в соответствие точку A' такую, что l - серединный перпендикуляр к AA' и каждую точку A, лежащую на l, оставляет на месте.
Обозначение: S_l.
Теорема Осевая симметрия является движением.
Замечание
1) Обратным движением к осевой симметрии является та же самая осевая симметрия, то есть $S_l \circ S_l = E$, где E - тождественное движение.
2) Неподвижными точками при осевой симметрии являются все точки прямой l.
3) Неподвижными прямыми при осевой симметрии являются прямая l и все прямые, перпендикулярные l.

Композиция движений

Композиция центральных симметрий

Композиция двух центральных симметрий с разными центрами - параллельный перенос.

$Z_{O_1} \circ Z_{O_2} = T_{2\overrightarrow{O_2O_1}}$

Композиция осевых симметрий

Рассмотрим композицию двух осевых симметрий: $S_b \circ S_a$. Относительно расположения a и b мы получаем две ситуации:

1) прямые a и b параллельны, тогда композицией является параллельный перенос на вектор, в два раза больший, чем расстояние между прямыми и перпенидкулярный им.

2) прямые a и b пересекаются в точке O, тогда композицией является поворот вокруг точки O на угол, в два раза больший, чем угол между прямыми a и b.

Композиция параллельных переносов

Композиция параллельных переносов на векторы $\overrightarrow{a}$ и $\overrightarrow{b}$ есть параллельный перенос на вектор $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b}$.

Композиция поворотов

Докажем, что композиция двух поворотов на углы, в сумме не кратные 360°, является поворотом на сумму углов. В случае, когда сумма кратна 360° композиция является параллельным переносом или тождественным движением (если центры поворотов совпадают).

Доказательство

Рассмотрим композицию поворотов $R_B^{\beta} \circ R_A^{\alpha}$. Если $A = B$, то утверждение теоремы очевидно, поэтому будем считать, что $A \neq B$. Пусть $l = AB$, прямые a и b проходят через точки A и B соответственно, причем $\angle(a, l) = \alpha/2$ и $\angle(l, b) = \beta/2$. Тогда по доказанным выше композициям осевых симметрий получаем:
$R_B^{\beta} \circ R_A^{\circ} = S_b \circ S_l \circ S_l \circ S_a = S_b \circ S_a$. Если $a||b$, то по-доказанному выше $S_b \circ S_a = T_{2u}$, где T_u — параллельный перенос, переводящий a в b, причем $u \perp a$. А если прямые a и b не параллельны и O — точка их пересечения, то $S_b \circ S_a$ — поворот на угол $\alpha + \beta$ с центром O. Ясно также, что $a||b$ тогда и только тогда, когда $(\alpha/2) + (\beta/2) = k \cdot 180°$, т. е. $\alpha + \beta = 2k \cdot 360°$, что и требовалось доказать.

Теорема о трех симметриях
Любое движение представимо в виде композиции не более, чем трех симметрий.
Доказательство
Для доказательства нам потребуется следующие 2 леммы:
Лемма 1
Если при движении 3 точки, не лежащие на одной прямой, остались на месте, то все точки плоскости остались на месте, то есть движение является тождественным.
Лемма 2
Пусть у нас A - неподвижная точка движения F и точка B такая, что $F(B) = B'$, тогда композиция $S_{l_B} \circ F$, где l_B - серединный перпендикуляр к BB', оставляет точку A так же на месте. Иными словами, A - неподвижная точка такой композиции движения.

Задачи

1. Через центр квадрата проведены две перпендикулярные прямые. Докажите, что их точки пересечения со сторонами квадрата образуют квадрат

2. На сторонах треугольника ABC внешним образом построены правильные треугольники A_1BC, AB_1C и ABC_1. Докажите, что $AA_1 = BB_1 = CC_1$.

3. Сколько осей симметрии может иметь семиугольник?

4. На сторонах BC и CD параллелограмма $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники BCP и CDQ. Докажите, что треугольник APQ правильный.

5. На отрезке AE по одну сторону от него построены равносторонние треугольники ABC и CDE; M и P - середины отрезков AD и BE. Докажите, что треугольник CPM равносторонний.

6. На сторонах CB и CD квадрата $ABCD$ взяты точки M и K так, что периметр треугольника CMK равен удвоенной стороне квадрата. Найдите величину угла MAK.

7. Может ли быть у фигуры на плоскости ровно две параллельные оси симметрии?

8. Внутри правильного треугольника ABC лежит точка O. Известно, что $\angle AOB = 113^\circ$, $\angle BOC = 123^\circ$. Найти углы треугольника, стороны которого равны отрезкам OA, OB, OC.

9. (Волчкевич № 17 стр 51) Вне равностороннего треугольника ABC выбрали точку E так, что $\angle BAC = 120^\circ$. Докажите, что $BE + EC = AE$.

10. (Волчкевич № 18 стр 51) Внутри правильного треугольника ABC взяли точку M так, что $\angle AMC = 150^\circ$. Докажите, что из отрезков AM, BM и CM можно сложить прямоугольный треугольник.

До встречи на наших мероприятиях!

Барышев И.Н.
Матфак ВШЭ
матпрофиль школы 2101