Теорема Фейербаха

Во всех задачах этого листка мы будем считать, что нам дан треугольник ABC, стороны которого равны $AB = c$, $AC = b$ и $BC = a$. Точки A_1, B_1 и C_1 - середины сторон BC, AC и AB соответственно. L - точка касания вписанной окружности со стороной BC, K - точка касания вневписанной окружности со стороной BC.

1. Докажите, что $BL = p - b$ и $CK = p - b$

2. Докажите, что A_1 - середина отрезка LK из предыдущих двух задач и посчитайте длину отрезка LK.

3. Докажите, что при инверсии относительно окружности с центром в точке A_1 и радиусом $\dfrac{|b-c|}{2}$ вписанная и вневписанная окружность переходят в себя.

4. Докажите, что если при отражении относительно биссектрисы угла A точка B переходит в B', точка C переходит в C', то отрезок $B'C'$ также является общей касательной вписанной и вневписанной окружности.

5. Докажите, что точка X пересечения отрезков BC и $B'C'$ лежит на биссектрисе угла A.

6. Рассмотрим точку P - середину отрезка BB'. Докажите, что точка P лежит на прямой A_1C_1 и точка P лежит на прямой AX.

7. Докажите, что $A_1P = \dfrac{|b-c|}{2}$.

8. Пусть D - точка пересечения прямой A_1C_1 и прямой $B'C'$. Докажите, что $A_1D : B'C = XA_1 : XC$.

9. Докажите, что $A_1P : AC = XA_1 : XC$. Из этой и предыдущей задачи докажите, что $A_1D : A_1P = B'C : AC$.

10. Докажите, что $A_1P : A_1C_1 = B'C : AC$.

11. Из задач №7, 9 и 10 выведите, что при инверсии относительно окружности из пункта 3 точка C_1 переходит в точку D.

12. Из задачи 11 выведите, что при инверсии из задачи 3 окружность, описанная около точек A_1, B_1 и C_1, переходит в прямую $B'C'$.

13. Из свойств инверсии и задач 3 и 12 выведите, что окружность, описанная около треугольника $A_1B_1C_1$ (окружность Эйлера), касается вписанной и вневписанной окружности, касающейся стороны BC.

Теорема Фейербаха

В произвольном треугольнике окружность Эйлера касается вписанной и трех вневписанных окружностей.