# Семинар учителей математики

## Движения. Инверсия. Разложение на множители


Барышев Игорь Николаевич

Матфак ВШЭ

Школа 2101

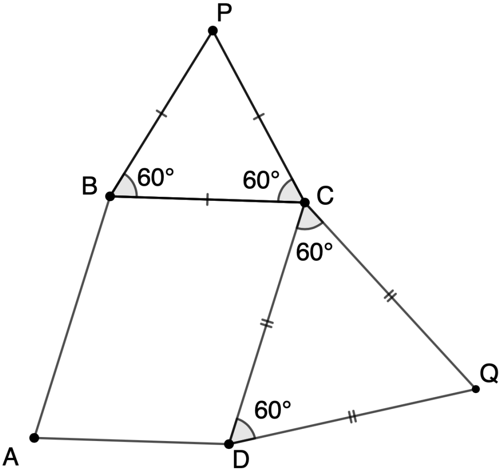
# Движения

1. Сколько осей симметрии может иметь семиугольник?

Ось симметрии семиугольника обязательно проходит через одну из его вершин (остальные вершины разбиваются на пары симметричных вершин). Пусть у семиугольника есть ось симметрии. Тогда у него есть три пары равных углов и три пары равных сторон. Вторая ось симметрии может быть расположена тремя существенно различными (не симметричными) способами. Легко видеть, что в каждом из этих трёх случаев все стороны семиугольника оказываются равными и все углы тоже.

Ответ: 0, 1 или 7.

2. На сторонах $BC$ и $CD$ параллелограмма $ABCD$ построены внешним образом правильные треугольники $BCP$ и $CDQ$. Докажите, что треугольник $APQ$ правильный.


P
B
C
60°
60°
60°
60°
Q
A
D

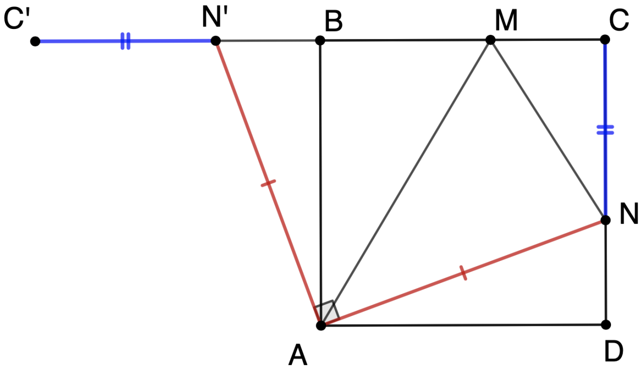
Заметим, что при повороте на $60^\circ$ векторы $\overrightarrow{QC}$ и $\overrightarrow{CP}$ переходят в $\overrightarrow{QD}$ и $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{DA}$.

Тогда при повороте на $60^\circ$ вектор $\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QC} + \overrightarrow{CP}$ переходит в вектор $\overrightarrow{QD} + \overrightarrow{DA} = \overrightarrow{QA}$, откуда получаем, что $QAP$ - равносторонний треугольник.

3. На отрезке $AE$ по одну сторону от него построены равносторонние треугольники $ABC$ и $CDE$; $M$ и $P$ - середины отрезков $AD$ и $BE$. Докажите, что треугольник $CPM$ равносторонний.

Рассмотрим $R_C^{60^\circ}$: $B \to A$, $E \to D$.
При этом середина отрезка $BE$ переходит в середину отрезка $AD$, откуда и получаем, что $CPM$ - равносторонний треугольник.

4. На сторонах $CB$ и $CD$ квадрата $ABCD$ взяты точки $M$ и $K$ так, что периметр треугольника $CMK$ равен удвоенной стороне квадрата. Найдите величину угла $MAK$.


C'
N'
B
M
C
N
A
D

Повернем вокруг точки $A$ на $90^\circ$: $C \to C'$, $N \to N'$.

Получается, что $CN = C'N'$, тогда так как $CC' = 2BC$,

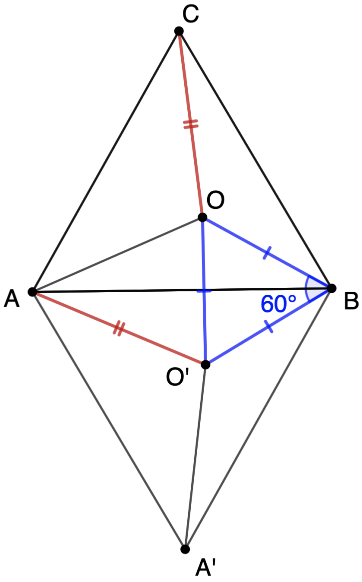
$P_{CNM} = CN + CM + MN = CN + C'N' + N'M$ и $N'M = NM$, откуда $\triangle AMN' = \triangle AMN$, получаем, что $\angle N'AM = \angle NAM$.

Из этого получается, что $\angle N'AM = \angle NAM = 45^\circ$.

5. Может ли быть у фигуры на плоскости ровно две параллельные оси симметрии?

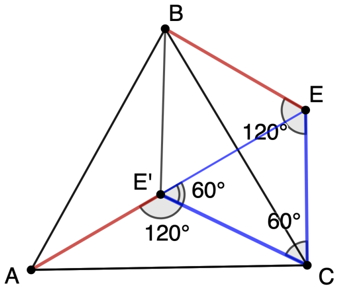
Нет, не может быть, так как композиция двух осевых симметрий с параллельными осями является параллельным переносом, а если у фигуры есть ось симметрии, то после параллельного переноса она снова переходит в ось симметрии, из чего можно сделать вывод, что осей сразу будет больше, чем две. Если так делать дальше, то количество осей - бесконечное.

6. Внутри правильного треугольника $ABC$ лежит точка $O$. Известно, что $\angle AOB = 113^\circ$, $\angle BOC = 123^\circ$. Найти углы треугольника, стороны которого равны отрезкам $OA$, $OB$, $OC$.


C
O
A
B
60°
O'
A'

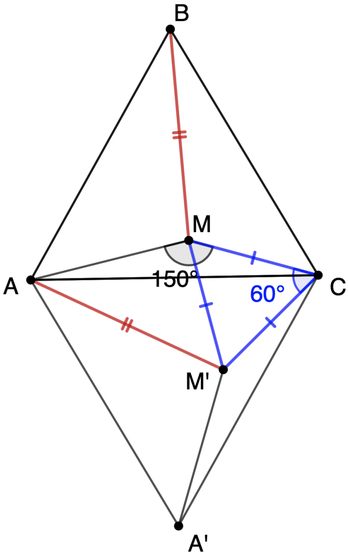
Сделаем поворот вокруг точки $B$ на $60^\circ$:
$A \to A'$, $O \to O'$, тогда $BOO'$ - равносторонний треугольник. $CO = AO'$.
Треугольник $AOO'$ - искомый. Так как
$\angle AOB = 113^\circ$, $\angle AOO' = 113^\circ - 60^\circ = 53^\circ$.
$\angle BOC = \angle BOA = 123^\circ$, тогда
$\angle AO'O = 123^\circ - 60^\circ = 63^\circ$.
Третий угол треугольника $AOO'$ равен
$180^\circ - 53^\circ - 63^\circ = 64^\circ$.
Ответ: $53^\circ$, $63^\circ$, $64^\circ$.

7. (Волчкевич № 17 стр 51) Вне равностороннего треугольника $ABC$ выбрали точку $E$ так, что $\angle BEC = 120^\circ$. Докажите, что $BE + EC = AE$.




Сделаем поворот вокруг точки $C$ на $60^\circ$:
$E \to E'$, $B \to A$, тогда $CEE'$ - равносторонний треугольник, значит, $\angle CE'E = 60^\circ$. С другой стороны, $\angle AE'C = \angle BEC = 120^\circ$.
Посмотрим на угол $AE'E = 120^\circ + 60^\circ = 180^\circ$, то есть $AE'E$ - одна прямая и $AE = AE' + E'E = BE + CE$, что и требовалось доказать.

8. (Волчкевич № 18 стр 51) Внутри правильного треугольника $ABC$ взяли точку $M$ так, что $\angle AMC = 150^\circ$. Докажите, что из отрезков $AM$, $BM$ и $CM$ можно сложить прямоугольный треугольник.


B
M
A
150°
C
60°
M'
A'

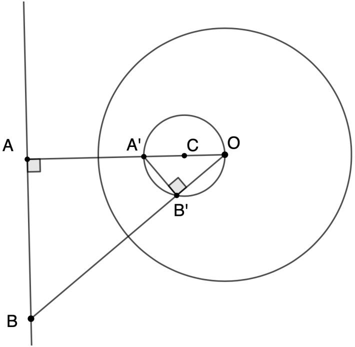
Сделаем поворот вокруг точки $C$ на $60^\circ$:
$M \to M'$,$B \to$ A, $A \to A'$, тогда $CMM'$ - равносторонний треугольник и $BM = AM'$.
Треугольник $AMM'$ - искомый, так как $AM' = BM$ и $MM' = CM$.
$\angle AMM' = 150^\circ - 60^\circ = 90^\circ$, что и требовалось доказать.

# Инверсия

**Инверсией** $I_O^R$ относительно окружности с центром $O$ и радиусом $R$ называется преобразование плоскости, которое каждой точке $A$ ставит в соответствие $A'$, такую, что $A'$ лежит на луче $AO$ и $AO \cdot A'O = R^2$.

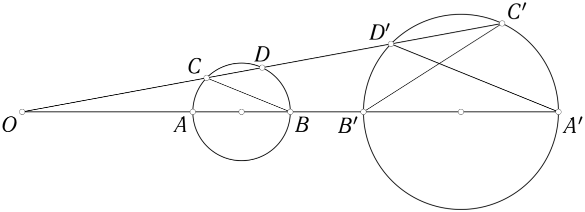
Свойства инверсии:

1. Инверсия и обратное к ней преобразование совпадают.
2. Прямые, проходящие через центр инверсии переходят в себя.
3. Прямые, не проходящие через центр инверсии, переходят в окружности, проходящие через центр инверсии.




Опустим из центра инверсии перпендикуляр на прямую $l$ - точка $A$. Пусть $A'$ - образ точка при инверсии относительно окружности с центром $O$. Построим на $A'O$ как на диаметре окружность. $\triangle OA'B' \sim \triangle OBA$, значит, $OB \cdot OB' = R^2$

4. Окружности, проходящие через центр инверсии, переходят в прямые.
5. Окружности, не проходящие через центр инверсии, переходят в гомотетичные им относительно центра инверсии окружности.




Пусть при инверсии $A \to A'$, $B \to B'$, построим на $A'B'$ как на диаметре окружность.
Так как $\frac{OB}{OA} = \frac{OA'}{OB'}$, окружность гомотетичны, поэтому углы $OBC$ и $OA'D'$ равны. Но угол $OD'A'$ равен углу $OB'C'$, так как $A'B'C'D'$ — вписанный четырехугольник. Следовательно, треугольники $OBC$ и $OC'B'$ подобны, откуда $OC \cdot OC' = R^2$.

Угол между кривыми - угол между касательными в точке пересечения кривых.
6. Угол между двумя любыми кривыми равен углу между их образами при инверсии в соответствующей точке.

Прямая $AD$ касается окружности с центром $O$ в точке $D$. $A'$ - основание перпендикуляра из $D$ на $AO$, $L$ - пересечение $AO$ и исходной окружности. Докажите, что $DL$ - биссектриса угла $ADA'$

Окружность 9 точек (окружность Эйлера) касается вписанной и трех вневписанных окружностей треугольника.

# Разложение на множители и бином

Числом сочетаний из $n$ элементов по $k$ называется количество способов выбрать $k$ элементов из данных $n$ элементов (наборы, отличающиеся порядком, считаются одинаковыми). Оно обозначается $C_n^k$. Посмотрим, как зависит число сочетаний от $n$ и $k$:
Сначала посчитаем сколькими способами можно выбрать упорядоченно $k$ элементов из $n$: первый элемент можно выбрать $n$ способами, второй элемент $(n-1)$ способом и т.д. Получается число $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Посчитаем, как связано количество упорядоченных и неупорядоченных выборок: из каждой неупорядоченной выборки размера $k$ можно сделать $k!$ упорядоченных выборок (упорядочить $k$ элементов можно $k!$ способами). Тогда получается, что $C_n^k \cdot k! = A_n^k$, откуда получается, что $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Свойства числа сочетаний:
1) $C_n^k = C_n^{n-k}$ 2) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

**Доказательство**

Помимо алгебраической проверки каждого из тождеств, у них есть комбинаторная интерпретация.

1) Количество способов выбрать $k$ объектов из $n$ и отложить их в сторону равняется количеству способов выбрать $n-k$ объектов, которые останутся лежать на месте.

2) Давайте предположим, что среди $n$ объектов есть один особенный, назовем его красивым, тогда если мы выбираем $k$ объектов из $n$ у нас есть два варианта: мы красивый объект взяли, тогда остается выбрать $k-1$ объект из $n-1$, либо мы красивый объект не взяли и надо выбрать $k$ объектов из $n-1$, ровно два этих слагаемых и стоят в правой части.

На основе второго тождества можно построить треугольник Паскаля: треугольник, у которого по диагоналям стоят 1, а под ними треугольник заполняется сложением чисел сверху.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \cdots & & & &
\end{array}
$$

Иными словами можно сказать, что для вычисления $C_n^k$ достаточно найти строчку под номером $n$ и элемент под номером $k$ (при этом обе нумерации начинаются с нуля).

Докажем, при помощи комбинаторики, что
$(1+x)^n = (1+x)(1+x)\cdot\ldots\cdot(1+x) =$
$C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2\cdot x^2 + C_n^3\cdot x^3 + \ldots + C_n^n\cdot x^n$.
Слагаемое справа будет содержать такой коэффициент перед $x^k$, сколькими способами можно выбрать $k$ скобок, из которых в произведение мы возьмем $x$, а все остальное в произведении будет дополнено единицей. Исходя из определения, количество способов выбрать $k$ объектов из $n$ это $C_n^k$, поэтому коэффициент перед $x^k$ равен числу сочетаний из $n$ объектов по $k$.
Теперь если мы в формулу выше подставим вместо $x = \frac{b}{a}$ и умножим обе части на $a^n$, то получаем, что
$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + b^n$.
Эту формулу называют **биномом Ньютона**.

## До встречи на наших мероприятиях!

Барышев И.Н.
Матфак ВШЭ
матпрофиль школы 2101