Двойное отношение точек и прямых

Двойным отношением четырех точек A, B, C и D на прямой ($A \neq D$, $B \neq C$) называется выражение $(A, B, C, D) := \dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \dfrac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$. Четверка точек A, B, C и D с условием $(A, B, C, D) = -1$ называется *гармонической.*

Двойным отношением прямых a, b, c, d, пересекающихся в одной точке, называется число $(a, b, c, d) = \dfrac{\sin \angle ac}{\sin \angle bc} : \dfrac{\sin \angle ad}{\sin \angle bd}$

0. Даны прямые a, b, c, d, проходящие через одну точку, и прямая l, через эту точку не проходящая. Пусть A, B, C, D — точки пересечения прямой l с прямыми a, b, c, d соответственно. Докажите, что $(abcd) = (ABCD)$.

1. а) Пусть $(A, B, C, D) = x$. Найдите двойные отношения точек A, B, C, D, записанных во всех других порядках.

б) Докажите, что если какие-то два числа из (A, B, C, D), (C, D, A, B), (B, A, C, D), (A, B, D, C) равны, то $(A, B, C, D) = \pm 1$.

с) Точки A, O, C, B, D лежат на прямой в указанном порядке. Известно, что $AO = OB$ и $OA \cdot OB = OC \cdot OD$. Найдите (A, B, C, D).

d) Докажите, что двойное отношение сохраняется при центральном проектировании (используйте 0 задачу).

е) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ прямые AB и CD пересекаются в точке G, AD и BC — в точке E. Прямые DB и EG пересекаются в точке H, AC и EG — в F. Найдите (E, G, F, H).

2. В треугольнике ABC биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине A пересекают прямую BC в точках X и Y соответственно. Докажите, что $(BCXY) = -1$.

3. В четырехугольнике $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями O — точка пересечения диагоналей, P и Q — точки пересечения лучей AD и BC, BA и CD соответственно. Докажите, что $\angle POB = \angle QOB$.

4. Даны прямая l, окружность и точки M, N, лежащие на окружности и не лежащие на прямой l. Рассмотрим отображение P прямой l на себя, являющееся композицией проектирования прямой l на данную окружность из точки M и проектирования окружности на прямую l из точки N. (Если точка X лежит на прямой l, то $P(X)$ есть пересечение прямой NY с прямой l, где Y — отличная от M точка пересечения прямой MX с данной окружностью.) Докажите, что преобразование P сохраняет двойное отношение точек.

5. Из точки A к окружности проведены касательные AP и AQ. Через точку A проведена произвольная прямая, пересекающая окружность в точках B и C, а хорду PQ в точке D. Докажите, что $(BCAD) = -1$.

6. Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, а E, F — точки пересечения прямых AB и CD, BC и AD. Прямая EO пересекает стороны AD и BC в точках M и N, прямая FO пересекает стороны AB и CD в точках P и Q. Докажите, что тогда прямые PN, MQ и EF пересекаются в одной точке.

7. A_1, B_1, C_1 — основания биссектрис треугольника ABC, P и Q – точки пересечения прямых AA_1 и B_1C_1, CC_1 и A_1B_1 соответственно. Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$.

8. H — основание высоты из вершины A треугольника ABC, A_1 — основание биссектрисы из вершины A, I и I_A — центры вписанной и вневписанной окружности, касающейся стороны BC, соответственно. Докажите, что $\angle IHA_1 = \angle I_AHA_1$.

9. Пусть O — середина хорды MN окружности. AB и CD — произвольные хорды, проходящие через O, P и Q — точки пересечения AC и BD с MN. Докажите, что O — середина отрезка PQ.