Семинар учителей математики

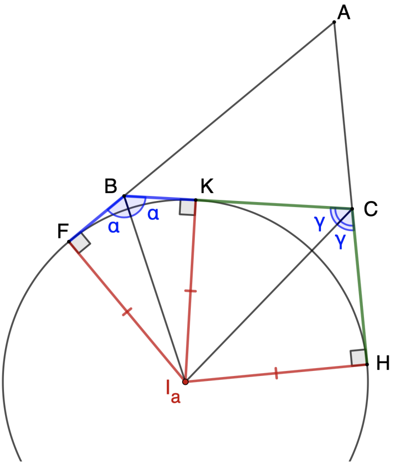
Бином и геометрия

Барышев Игорь Николаевич

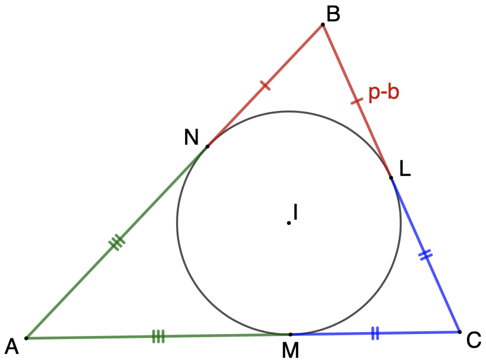
Матфак ВШЭ

Школа 2101

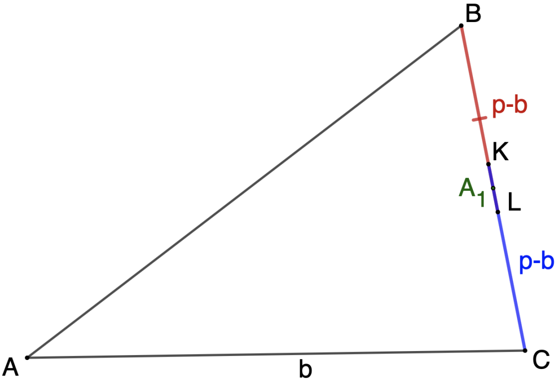
Разбор листа т. Фейербаха



$$P_{ABC} = AB + AC + BC = AB + BK + CK + AC =$$
$$AB + BF + AC + CH = AF + AH$$
$$AF = AH = p \Rightarrow CH = CH = p - AC = p - b$$



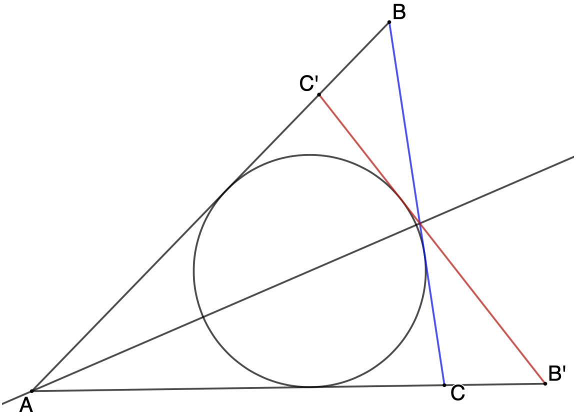
$$P_{ABC} = BN + BL + AN + AM + CM + CL = 2(BN + AM + CM)$$
$$\Rightarrow$$
$$p = BN + AM + CM = BN + AC = BN + b \Rightarrow$$
$$BN = BL = p - b$$



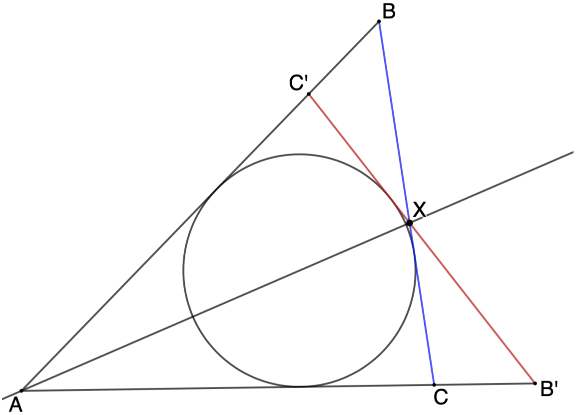
Так как $BL = p - b = CK$, то
$KA_1 = \frac{a}{2} - (p - b) = A_1L = \frac{b-c}{2}$

Докажите, что при инверсии относительно окружности с центром в точке A_1 и радиусом $\dfrac{|b-c|}{2}$ вписанная и вневписанная окружность переходят в себя.

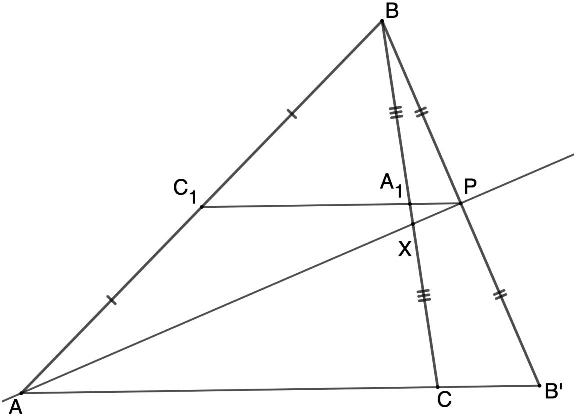
Заметим, что такая окружность перпендикулярна вписанной и вневписанной, а, значит, по свойству инверсии они остаются на месте.



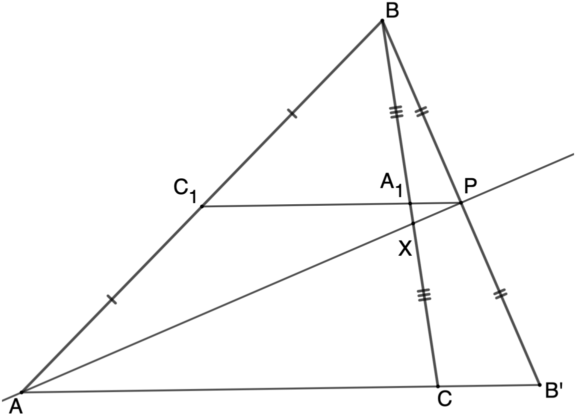
Докажите, что если при отражении относительно биссектрисы угла A точка B переходит в B', точка C переходит в C', то отрезок $B'C'$ также является общей касательной вписанной и вневписанной окружности.



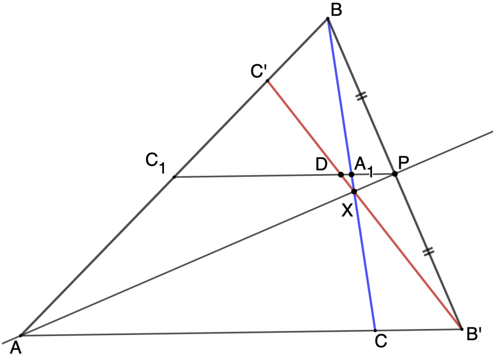
Докажите, что точка X пересечения отрезков BC и $B'C'$ лежит на биссектрисе угла A.



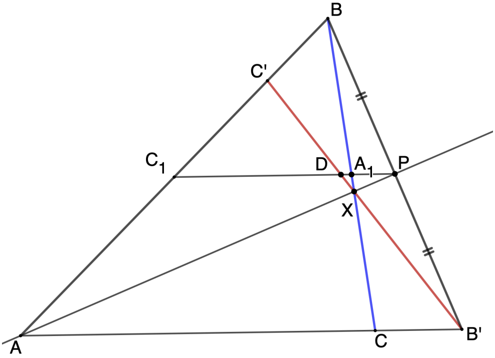
Рассмотрим точку P - середину отрезка BB'. Докажите, что точка P лежит на прямой A_1C_1 и точка P лежит на прямой AX.



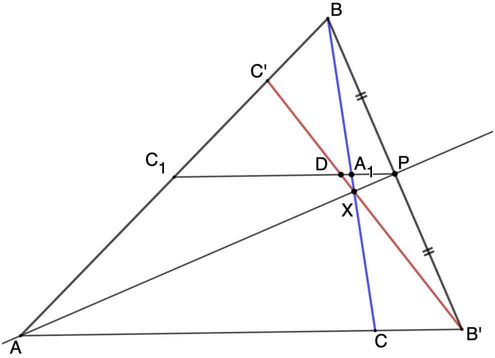
Докажите, что $A_1P = \frac{1}{2}CB' = \frac{1}{2}(AB' - AC) = \dfrac{|b-c|}{2}$.



8. Пусть D - точка пересечения прямой A_1C_1 и прямой $B'C'$. Докажите, что $A_1D : B'C = XA_1 : XC$.
Это следует из подобия $\triangle XA_1D \sim XCB'$.



9. Докажите, что $A_1P : AC = XA_1 : XC$. Из этой и предыдущей задачи докажите, что $A_1D : A_1P = B'C : AC$. Это следует из подобий $\triangle XA_1D \sim XCB'$ и $\triangle XA_1P \sim XCA$.



10. Докажите, что $A_1P : A_1C_1 = B'C : AC$.
Это следует из подобий $\triangle BA_1P \sim BCB'$ и $\triangle BA_1C_1 \sim BCA$.

11. Из задач №7, 9 и 10 выведите, что при инверсии относительно окружности из пункта 3 точка C_1 переходит в точку D.

Из $A_1P : A_1C_1 = B'C : AC$, $A_1D : A_1P = B'C : AC$ и $A_1P = \frac{|b-c|}{2}$ следует, что $\frac{A_1P}{A_1C_1} = \frac{A_1D}{A_1P}$, откуда $A_1P^2 = A_1C_1 \cdot A_1D$, отсюда и следует, что при инверсии относительно окружности с центром A_1 и радиусом $\frac{|b-c|}{2}$ точка $C_1 \to D$.

12. Из задачи 11 выведите, что при инверсии из задачи 3 окружность, описанная около точек A_1, B_1 и C_1, переходит в прямую $B'C'$.

Аналогично доказывается, что B_1 при инверсии переходит в точку на прямой $B'C'$.

Бином Ньютона

Числом сочетаний из n элементов по k называется количество способов выбрать k элементов из данных n элементов (наборы, отличающиеся порядком, считаются одинаковыми). Оно обозначается C_n^k. Посмотрим, как зависит число сочетаний от n и k:

Сначала посчитаем сколькими способами можно выбрать упорядоченно k элементов из n: первый элемент можно выбрать n способами, второй элемент $(n-1)$ способом и т.д. Получается число $A_n^k = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \ldots (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$.

Посчитаем, как связано количество упорядоченных и неупорядоченных выборок: из каждой неупорядоченной выборки размера k можно сделать $k!$ упорядоченных выборок (упорядочить k элементов можно $k!$ способами). Тогда получается, что $C_n^k \cdot k! = A_n^k$, откуда получается, что $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Свойства числа сочетаний:

1) $C_n^k = C_n^{n-k}$ 2) $C_n^k = C_{n-1}^{k-1} + C_{n-1}^k$.

Доказательство

Помимо алгебраической проверки каждого из тождеств, у них есть комбинаторная интерпретация.

1) Количество способов выбрать k объектов из n и отложить их в сторону равняется количеству способов выбрать $n-k$ объектов, которые останутся лежать на месте.

2) Давайте предположим, что среди n объектов есть один особенный, назовем его красивым, тогда если мы выбираем k объектов из n у нас есть два варианта: мы красивый объект взяли, тогда остается выбрать $k-1$ объект из $n-1$, либо мы красивый объект не взяли и надо выбрать k объектов из $n-1$, ровно два этих слагаемых и стоят в правой части.

На основе второго тождества можно построить треугольник Паскаля: треугольник, у которого по диагоналям стоят 1, а под ними треугольник заполняется сложением чисел сверху.

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & 1 & & & & \\
 & & & 1 & & 1 & & & \\
 & & 1 & & 2 & & 1 & & \\
 & 1 & & 3 & & 3 & & 1 & \\
1 & & 4 & & 6 & & 4 & & 1 \\
 & & & & \dots & & & &
\end{array}
$$

Иными словами можно сказать, что для вычисления C_n^k достаточно найти строчку под номером n и элемент под номером k (при этом обе нумерации начинаются с нуля).

Докажем, при помощи комбинаторики, что
$(1+x)^n = (1+x)(1+x)\cdot\ldots\cdot(1+x) =$
$C_n^0 + C_n^1 x + C_n^2\cdot x^2 + C_n^3\cdot x^3 + \ldots + C_n^n\cdot x^n$.
Слагаемое справа будет содержать такой коэффициент перед x^k, сколькими способами можно выбрать k скобок, из которых в произведение мы возьмем x, а все остальное в произведении будет дополнено единицей. Исходя из определения, количество способов выбрать k объектов из n это C_n^k, поэтому коэффициент перед x^k равен числу сочетаний из n объектов по k.
Теперь если мы в формулу выше подставим вместо $x = \frac{b}{a}$ и умножим обе части на a^n, то получаем, что
$(a+b)^n = a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 \ldots + C_n^k a^{n-k} b^k + \ldots + b^n$.
Эту формулу называют **биномом Ньютона**.

Доказательство того, что: $k \cdot C_n^k = n \cdot C_{n-1}^{k-1}$

1. Из n ребят выбирают команду для участия в КВН из k человек и капитана в ней. Сколькими способами это можно сделать?

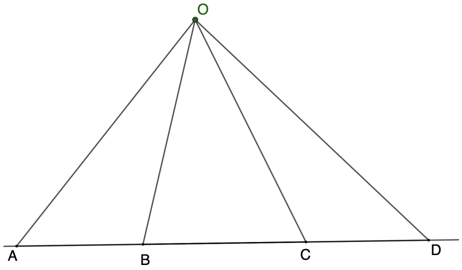
Доказательство того, что: $C_n^1 + C_n^3 + \ldots = C_n^0 + C_n^2 + \ldots$

2. Рассмотрим множество из n элементов и выделим в нем один элемент, назовем его x_1. Разобьем все подмножества нашего множества на пары: подмножество с x_1 - подмножество без x_1.
   В каждой паре мощность подмножеств будет отличаться четностью, откуда и следует формула.

Двойное отношение точек

Двойным отношением четырех точек A, B, C и D на прямой ($A \neq D$, $B \neq C$) называется выражение $(A, B, C, D) := \dfrac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \dfrac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}}$. Четверка точек A, B, C и D с условием $(A, B, C, D) = -1$ называется *гармонической*.

Двойным отношением прямых a, b, c, d, пересекающихся в одной точке, называется число
$$(a, b, c, d) = \frac{\sin \angle ac}{\sin \angle bc} : \frac{\sin \angle ad}{\sin \angle bd}$$



Заметим, что

$$\frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} = \frac{S_{AOC}}{S_{BOC}} = \frac{AO \cdot CO \cdot \sin \angle ac}{BO \cdot CO \cdot \sin \angle bc} = \frac{AO \sin \angle ac}{BO \sin \angle bc},$$

аналогично

$$\frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} = \frac{AO \sin \angle ad}{BO \sin \angle bd} \Rightarrow \frac{\overrightarrow{AC}}{\overrightarrow{BC}} : \frac{\overrightarrow{AD}}{\overrightarrow{BD}} = \frac{\sin \angle ac}{\sin \angle bc} : \frac{\sin \angle ad}{\sin \angle bd}$$

До встречи на наших мероприятиях!

Барышев И.Н.
Матфак ВШЭ
матпрофиль школы 2101