Семинар учителей математики

Геометрия

Барышев Игорь Николаевич

Матфак ВШЭ

Школа 2101

Задачи на доп построение в 7 классе

Литература 7 и 8 класса по геометрии и инструменты:

1. Волчкевич, его учебник и задачник в МЭШ.

2. Гордин Р.К. Планиметрия 7-9 класс, есть в открытом доступе.

3. Прасолов Геометрия, Задачи повышенной сложности 7 класс, Просвещение **НЕ ЗАДАЧИ по планиметрии от МЦНМО**

4. Geogebra.org: https://www.geogebra.org/classic

5. Игра Евклидия: https://www.euclidea.xyz/ru/

1. В треугольнике ABC с прямым углом C провели высоту CH. CD - биссектриса треугольника ACH. Докажите, что CBD - равнобедренный треугольник.

2. $ABCD$ — выпуклый четырехугольник. Известно, что $\angle CAD = \angle DBA = 40^\circ$, $\angle CAB = 60^\circ$, $\angle CBD = 20^\circ$. Найдите угол CDB.

3. На прямой отмечены различные точки A, B и C таким образом, что $AB = AC = 1$. На отрезках AB и AC в одну полуплоскость построены квадрат $ABDE$ и равносторонний треугольник ACF соответственно. Найдите угол между прямыми BF и CE.

4. От квадрата отрезан прямоугольный треугольник, сумма катетов которого равна стороне квадрата. Найдите сумму углов, под которомы видна гипотенуза этого треугольника из трех оставшихся вершин квадрата.

5. На стороне AB квадрата $ABCD$ отмечена точка P. Биссектриса угла DCP пересекает сторону AD в точке Q. Докажите, что $CP = DQ + BP$.

6. В треугольнике ABC провели биссектрису BE. Оказалось, что $BC + CE = AB$. Докажите, что один из углов треугольника в два раза больше другого.

7. В треугольнике ABC высоты AA_1 и CC_1 пересекаются в точке H, лежащей внутри треугольника. Известно, что H – середина AA_1 , а $CH : HC_1 = 2 : 1$. Найдите величину угла B.

8. Высота AH остроугольного треугольника ABC равна его медиане BM. На продолжении стороны AB за точку B отложена точка D так, что $BD = AB$. Найдите угол BCD.

9. На боковых сторонах AB и BC равнобедренного треугольника ABC отмечены точки E и F соответственно так, что $AE = 2BF$. На луче EF отмечена точка G так, что $GF = EF$. Докажите, что угол ACG – прямой.

Гомотетия

Определение 1

Гомотетией с центром в точке О и коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование плоскости, при котором точка А переходит в точку A_1, которая лежит на прямой OA и $OA_1 = k \cdot OA$, причём при $k > 0$ точки A и A_1 лежат по одну, а при $k < 0$ — по разные стороны от точки O.

Обозначение: H_O^k

Определение 2

Гомотетией с центром в точке О и коэффициентом $k \neq 0$ называется преобразование плоскости, при котором точка A переходит в такую точку A_1, что $\overrightarrow{OA_1} = k \cdot \overrightarrow{OA}$.

Свойства гомотетии:

1. Гомотетия переводит прямую либо в параллельную ей, либо оставляет на месте.

2. Гомотетия переводит фигуру в подобную ей.

3. Гомотетия сохраняет углы.

Прямая Эйлера. В произвольном треугольнике точка пересечения медиан M, центр описанной окружности O и точка пересечения высот H лежат на одной прямой, причем $HM : MO = 2 : 1$

Двойное отношение точек

1. a) Пусть $(A, B, C, D) = x$. Найдите двойные отношения точек A, B, C, D, записанных во всех других порядках.
б) Докажите, что если какие-то два числа из (A, B, C, D), (C, D, A, B), (B, A, C, D), (A, B, D, C) равны, то $(A, B, C, D) = \pm 1$.
c) Точки A, O, C, B, D лежат на прямой в указанном порядке. Известно, что $AO = OB$ и $OA \cdot OB = OC \cdot OD$. Найдите (A, B, C, D).
d) Докажите, что двойное отношение сохраняется при центральном проектировании (используйте 0 задачу).
e) В выпуклом четырехугольнике $ABCD$ прямые AB и CD пересекаются в точке G, AD и BC — в точке E. Прямые DB и EG пересекаются в точке H, AC и EG — в F. Найдите (E, G, F, H).

a) Без ограничения общности будем считать, что
$AD = AB + BC + CD$. Из определения следует, что
$(ABCD) = (BADC) = (CDAB) = (DCBA) = x$.
$(ABDC) = \frac{1}{x}$
$(ABDC) + (ADBC) = 1$, откуда получаем, что
$(ACBD) = x - 1$; $(ADBC) = 1 - \frac{1}{x}$.
b) Следует из пункта а
c) $(ABCD) = \frac{AC}{BC} : \frac{AD}{BD} =$

2. В треугольнике ABC биссектрисы внутреннего и внешнего углов при вершине A пересекают прямую BC в точках X и Y соответственно. Докажите, что $(BCXY) = -1$.

3. В четырехугольнике $ABCD$ с перпендикулярными диагоналями O — точка пересечения диагоналей, P и Q — точки пересечения лучей AD и BC, BA и CD соответственно. Докажите, что $\angle POB = \angle QOB$.

4. Даны прямая l, окружность и точки M, N, лежащие на окружности и не лежащие на прямой l. Рассмотрим отображение P прямой l на себя, являющееся композицией проектирования прямой l на данную окружность из точки M и проектирования окружности на прямую l из точки N. (Если точка X лежит на прямой l, то $P(X)$ есть пересечение прямой NY с прямой l, где Y — отличная от M точка пересечения прямой MX с данной окружностью.) Докажите, что преобразование P сохраняет двойное отношение точек.

5. Из точки A к окружности проведены касательные AP и AQ. Через точку A проведена произвольная прямая, пересекающая окружность в точках B и C, а хорду PQ в точке D. Докажите, что $(BCAD) = -1$.

6. Пусть O — точка пересечения диагоналей выпуклого четырехугольника $ABCD$, а E, F — точки пересечения прямых AB и CD, BC и AD. Прямая EO пересекает стороны AD и BC в точках M и N, прямая FO пересекает стороны AB и CD в точках P и Q. Докажите, что тогда прямые PN, MQ и EF пересекаются в одной точке.

7. A_1, B_1, C_1 — основания биссектрис треугольника ABC, P и Q – точки пересечения прямых AA_1 и B_1C_1, CC_1 и A_1B_1 соответственно. Докажите, что $\angle ABP = \angle CBQ$.

8. H — основание высоты из вершины A треугольника ABC, A_1 — основание биссектрисы из вершины A, I и I_A — центры вписанной и вневписанной окружности, касающейся стороны BC, соответственно. Докажите, что $\angle IHA_1 = \angle I_A HA_1$.

9. Пусть O — середина хорды MN окружности. AB и CD — произвольные хорды, проходящие через O, P и Q — точки пересечения AC и BD с MN. Докажите, что O — середина отрезка PQ.

До встречи на наших мероприятиях!

Барышев И.Н.
Матфак ВШЭ
матпрофиль школы 2101