

Гомотетия

Упражнения

1. Пусть на плоскости есть два параллельных отрезка AB и CD . Сколько существует гомотетий, переводящих один отрезок в другой?
2. Пусть на плоскости даны две окружности, круги которых не пересекаются. Сколько существует гомотетий переводящих одну окружность в другую? Где лежат их центры?
3. Используя упр. 1 докажите, что в произвольной трапеции середины оснований, точка пересечения диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон лежат на одной прямой.
4. Докажите, что точки, симметричные данной относительно середин сторон некоторого квадрата, образуют квадрат.
- 5.1. Докажите, что если отразить ортоцентр (точку пересечения высот) относительно сторон треугольника, полученные точки попадают на описанную окружность треугольника.
- 5.2. Докажите, что если отразить ортоцентр (точку пересечения высот) относительно середин сторон треугольника, полученные точки попадают на описанную окружность треугольника.
- 5.3. **Окружность 9 точек** При помощи предыдущих пунктов докажите, что в произвольном треугольнике середины сторон, основания высот и середины отрезков, соединяющих вершины с ортоцентром, лежат на одной окружности.
6. На зафиксированной окружности провели хорду AB . Найдите ГМТ пересечения медиан треугольников ABC , когда C лежит на этой зафиксированной окружности.
7. Докажите, что композиция (результат последовательного применения) двух гомотетий с коэффициентами k_1 и k_2 , где $k_1 \cdot k_2 \neq 1$, есть гомотетия, причём центры всех трёх гомотетий лежат на одной прямой. Что будет в случае $k_1 \cdot k_2 = 1$?
8. **Теорема о трех колпаках** Докажите, что попарные точки пересечения внешних касательных к 3 окружностям лежат на одной прямой (используйте упр. 2 и упр. 7)
9. Два неравных квадрата имеют параллельные стороны. Докажите, что четыре прямые, соединяющие соответственные вершины их, пересекаются в одной точке.
10. В треугольнике ABC точка K - точка касания вписанной окружности со стороной BC , L - точка касания невписанной окружности, касающейся стороны BC и

продолжений сторон AC и AB . Пусть T - точка на вписанной окружности, диаметрально противоположная точке K . Докажите, что точки A , T и L лежат на одной прямой.

11. **Прямая Нагеля** При помощи упр. 11 докажите, что точка Нагеля N (точка пересечения отрезков, соединяющих вершину с точкой касания вневписанной окружности противоположной стороны), точка пересечения медиан M и центр вписанной окружности I треугольника ABC лежат на одной прямой, причем $NM : NI = 2 : 1$.

Задачи

1. Четырёхугольник разрезан диагоналями на четыре треугольника. Докажите, что точки пересечения медиан этих треугольников образуют параллелограмм.

2. Точка D на стороне BC треугольника ABC такова, что радиусы вписанных окружностей треугольников ABD и ACD равны. Докажите, что радиусы окружностей, вневписанных в треугольники ABD и ACD , касающихся соответственно отрезков BD и CD , также равны.

3. Точки K и L на сторонах соответственно AB и AC остроугольного треугольника ABC таковы, что $KL \parallel BC$; M – точка пересечения перпендикуляров, восставленных в точках K и L к отрезкам AB и AC . Докажите, что точки A , M и центр O описанной окружности треугольника ABC лежат на одной прямой.

4. Докажите, что три прямые, проведённые через середины сторон треугольника параллельно биссектрисам противолежащих углов, пересекаются в одной точке.

5. Биссектрисы углов A и C треугольника ABC пересекают его стороны в точках A_1 и C_1 , а описанную окружность этого треугольника – в точках A_0 и C_0 соответственно. Прямые A_1C_1 и A_0C_0 пересекаются в точке P . Докажите, что отрезок, соединяющий P с центром I вписанной окружности треугольника ABC , параллелен AC .

6. Дан треугольник ABC . Окружность ω касается описанной окружности Ω треугольника ABC в точке A , пересекает сторону AB в точке K , а сторону BC – в точке M . Касательная CL к окружности ω такова, что отрезок KL пересекает сторону BC в точке T . Докажите, что отрезок BT равен по длине касательной, проведённой из точки B к ω .

7. Окружность S касается равных сторон AB и BC равнобедренного треугольника ABC в точках P и K , а также касается внутренним образом описанной окружности треугольника ABC . Докажите, что середина отрезка PK является центром вписанной окружности треугольника ABC .