

# Семинар учителей математики

## Геометрия 8 класса. Повторение

Барышев Игорь Николаевич

Матфак ВШЭ

Школа 2101



# Задачи

1. Биссектриса  $AD$  равнобедренного треугольника  $ABC$  с основанием  $AC$  в два раза больше биссектрисы  $BE$ . Найдите углы треугольника  $ABC$ .

2. Одна из диагоналей трапеции равняется сумме оснований, а угол между диагоналями равен  $60^\circ$ . Докажите, что эта трапеция - равнобедренная.

3. Одна из боковых сторон трапеции равна сумме оснований. Докажите, что биссектрисы углов при этой стороне пересекаются на другой боковой стороне.

4.  $O$  – центр квадрата  $ABCD$ . Точка  $P$  внутри квадрата такова, что треугольник  $APD$  – равносторонний.  $M$  и  $N$  – середины отрезков  $BP$  и  $CP$ . Докажите, что треугольник  $MON$  – также равносторонний.

5. В треугольнике  $ABC$ :  $AC = 8$ ,  $BC = 5$ . Прямая, параллельная биссектрисе внешнего угла  $C$ , проходит через середину стороны  $AB$  и точку  $E$  на стороне  $AC$ . Найдите  $AE$ .

6. На стороне  $AB$  квадрата  $ABCD$  отмечена точка  $K$ , а на стороне  $BC$  – точка  $L$  так, что  $KB = LC$ .  
Отрезки  $AL$  и  $CK$  пересекаются в точке  $P$ .  
Докажите, что отрезки  $DP$  и  $KL$  перпендикулярны.



7. В треугольнике  $ABC$  с углом  $B$ , равным  $120^\circ$ , найдите длину биссектрисы  $BL$ , если  $AB = 5$ ,  $BC = 3$ .

8. Из вершины прямого угла треугольника  $ABC$  проведена медиана  $CM$ . Окружность, вписанная в треугольник  $CAM$ , касается  $CM$  в её середине. Найдите угол  $BAC$ .

9. В трапецию  $ABCD$  вписали окружность. Известно, что эта окружность касается боковых сторон трапеции  $AB$  и  $CD$  в точках  $M$  и  $N$  соответственно. Найдите длины оснований трапеции, если  $AM = 12$ ,  $BM = 3$ ,  $CD = 13$  и  $BC < \frac{1}{2}AD$ .

10. *Задача Архимеда* На окружности отмечены точки  $A$ ,  $B$ ,  $C$  и  $D$ , причем  $D$  - середина дуги  $AB$ , а точки  $B$  и  $C$  лежат по разные стороны от прямой  $AD$ . Из точки  $D$  опущен перпендикуляр  $DF$  к прямой  $BC$ . Докажите, что  $AC + CF = BF$  ( $F$  делит пополам длину ломанной  $ACB$ ).

11. Дан равнобедренный треугольник  $ABC$  ( $AB = AC$ ). На меньшей дуге  $AB$  описанной около него окружности взята точка  $D$ . На продолжении отрезка  $AD$  за точку  $D$  выбрана точка  $E$  так, что точки  $A$  и  $E$  лежат в одной полуплоскости относительно  $BC$ . Описанная окружность треугольника  $BDE$  пересекает сторону  $AB$  в точке  $F$ . Докажите, что прямые  $EF$  и  $BC$  параллельны.

12. В равнобокой трапеции диагональ является биссектрисой острого угла и делит среднюю линию трапеции на отрезки 5 и 13. Найдите площадь трапеции.

13. В трапеции  $ABCD$  боковая сторона  $CD = 5$ .  
Найдите площадь трапеции, если расстояния от точек  $A$  и  $B$  до прямой  $CD$  равны 7 и 3 соответственно.

14. В выпуклом четырёхугольнике  $ABCD$ :  
 $AB = BC = CD$ ,  $M$  – точка пересечения диагоналей,  $K$  – точка пересечения биссектрис углов  $A$  и  $D$ . Докажите, что точки  $A$ ,  $M$ ,  $K$  и  $D$  лежат на одной окружности.



# Злые задачи по геометрии

15. Докажите, что если в треугольнике  $ABC$   
 $\angle A = 60^\circ$ , то  $OH = |BA - AC|$ , где  $H$  - ортоцентр,  
 $O$  - центр описанной окружности.

16. Угол  $B$  ромба  $ABCD$  равен  $40^\circ$ ,  $E$  – середина  $BC$ ,  $F$  – основание перпендикуляра, опущенного из  $A$  на  $DE$ . Найдите угол  $DFC$ .

17. Дан параллелограмм  $ABCD$ , отличный от ромба. Вписанные окружности треугольников  $ABC$  и  $ADC$  касаются диагонали  $AC$  в точках  $X$  и  $Y$ . Вписанные окружности треугольников  $BCD$  и  $BAD$  касаются диагонали  $BD$  в точках  $Z$  и  $T$ . Докажите, что точки  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и  $T$  являются вершинами прямоугольника.

18. На гипотенузе  $AB$  прямоугольного треугольника  $ABC$  отметили точку  $D$  так, что  $BD = AC$ .  
Докажите, что в треугольнике  $ACD$  биссектриса  $AL$ , медиана  $CM$  и высота  $DH$  пересекаются в одной точке.

До встречи на наших мероприятиях!

Барышев И.Н.  
Матфак ВШЭ  
матпрофиль школы 2101