

## Инвариант

### Задачи для разбора

- Петя записывает в строку числа  $0, 1, 2, \dots, 10$  в каком хочет порядке. Затем каждым ходом он увеличивает два рядом стоящих числа на 1. Может ли Петя за несколько ходов добиться, чтобы все числа стали равными?
- Маляр-хамелеон ходит по клетчатой доске как хромая ладья, то есть в соседнюю по стороне клетку. Попав в очередную клетку, он либо сам перекрашивается в её цвет, либо перекрашивает клетку в свой цвет. Белого маляра-хамелеона ставят на чёрную доску размером  $8 \times 8$  клеток. Сможет ли маляр раскрасить её в шахматном порядке?
- Ножки циркуля находятся в узлах бесконечного листа клетчатой бумаги, клетки которого — квадраты со стороной 1. Разрешается, не меняя раствора циркуля, поворотом его вокруг одной из ножек переместить вторую ножку в другой узел клетчатой бумаги. Можно ли за несколько таких шагов поменять ножки циркуля местами?

### Задачи для самостоятельного решения

1. В одной вершине куба написано число 1, а в остальных — нули. Можно прибавлять по единице к числам в концах любого ребра. Можно ли добиться, чтобы все числа делились а) на 2; б) на 3?
2. По кругу выписано несколько чисел. Если для некоторых четырёх идущих подряд чисел  $a, b, c, d$  произведение чисел  $a - d$  и  $b - c$  отрицательно, то числа  $b$  и  $c$  можно поменять местами. Докажите, что такие операции можно проделать лишь конечное число раз.
3. Найдите наибольшее значение произведения двух чисел  $a$  и  $b$ , сумма которых равна  $c$ .
4. На доске написаны 100 чисел:  $1, 1/2, 1/3, \dots, 1/99$ . Каждым ходом Петя стирает любые два числа и записывает вместо них отношение их произведения к их сумме. Докажите, что последнее число на доске не зависит от порядка стирания и найдите это число.
5. Можно ли бумажный круг разрезать на несколько частей по прямым линиям и дугам окружностей и составить из них квадрат той же площади?
6. Пусть  $F_1, F_2, F_3, \dots$  — последовательность выпуклых четырехугольников, где  $F_{k+1}$  (при  $k = 1, 2, 3, \dots$ ) получается так:  $F_k$  разрезают по диагонали, одну из частей переворачивают и склеивают по линии разреза с другой частью. Какое наибольшее количество различных четырехугольников может содержать эта последовательность? (Различными считаются многоугольники, которые нельзя совместить движением.)
7. Из шахматной доски вырезали центральный квадрат  $2 \times 2$ . Можно ли оставшуюся часть разрезать на 4-клеточные фигурки Г?