Семинар учителей математики
Классические средние и геометрия 9 класса

Барышев Игорь Николаевич

Матфак ВШЭ

Школа 2101

1. Докажите, что

$$\frac{a+b+c+d+e}{5} \geq \sqrt[5]{abcde}$$

2. При положительных x найдите наименьшее значение $f(x) = x^2 + \frac{2}{x}$.

3. Докажите, что если произведение положительных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равно 1, то $x_1 + x_2 + \ldots + x_n \geq n$.

4. Докажите, что для любых положительных чисел x и y справедливо неравенство $\frac{x}{x^4+y^2} + \frac{y}{y^4+x^2} \leq \frac{1}{xy}$.

5. Докажите, что при любых a, b, c имеет место неравенство
$a^4 + b^4 + c^4 \geq abc(a + b + c)$

6. Докажите, что при $x \geq 0$ выполняется неравенство $3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0$

7. Для положительных a и b докажите неравенство

$$\frac{1}{a+\frac{1}{b}+2}+\frac{1}{b+\frac{1}{a}+2}\le\frac{1}{2}$$

Геометрия 9 класса

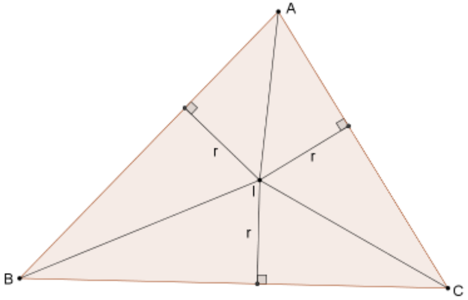
Формулы площади:

Пусть a, b, c - стороны треугольника, p - его полупериметр, r_a - радиус вневписанной окружности, касающейся стороны a и продолжений b и c, r - радиус вписанной окружности. Тогда:

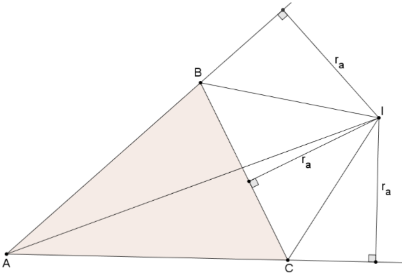
$S = rp$

$S = r_a \cdot (p - a)$

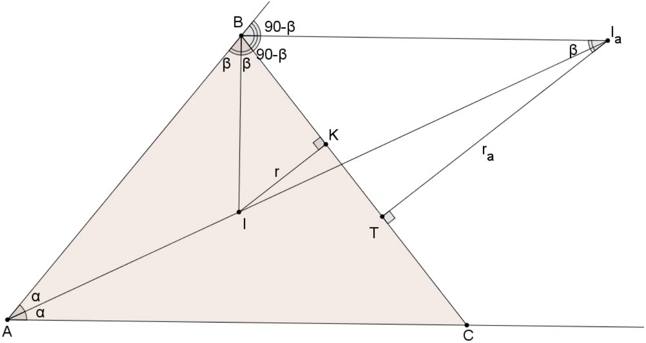
$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$



Для доказательства первой формулы соединим вершины треугольника с центром вписанной окружности, тогда по 1 формуле из списка выше $S_{AIC} = \frac{1}{2}AC \cdot r$, $S_{AIB} = \frac{1}{2}AB \cdot r$, $S_{CIB} = \frac{1}{2}BC \cdot r$. Так как $S_{ABC} = S_{AIB} + S_{AIC} + S_{BIC} = \frac{1}{2}AB \cdot r + \frac{1}{2}AC \cdot r + \frac{1}{2}BC \cdot r = r \cdot p$, что и требовалось доказать.



Для доказательства первой формулы соединим вершины треугольника с центром вневписанной окружности, тогда по 1 формуле из списка выше $S_{AIC} = \frac{1}{2}AC \cdot r_a$, $S_{AIB} = \frac{1}{2}AB \cdot r_a$, $S_{CIB} = \frac{1}{2}BC \cdot r_a$. Так как $S_{ABC} = S_{AIB} + S_{AIC} - S_{BIC} = \frac{1}{2}AB \cdot r_a + \frac{1}{2}AC \cdot r_a - \frac{1}{2}BC \cdot r_a = r_a \cdot (p - BC) = r_a(p - a)$, что и требовалось доказать.



Рассмотрим треугольник ABC, центр вписанной окружности I и центр вневписанной окружности I_a. По-доказанному на первом вебинаре отрезок $BK = p - AC = p - b$, отрезок $BT = p - AB = p - c$. Так как центр вписанной окружности лежит на биссектрисе угла B, то $\angle IBK = \beta$, так как биссектрисы смежных углов перпендикулярны и центр вневписанной окружности лежит на внешней биссектрисе, то $\angle TBI_a = 90^\circ - \beta$, откуда $\angle BI_aT = \beta$. Получаем, что $\triangle BIK \sim I_aBT$, откуда получаем, что $\dfrac{IK}{BT} = \dfrac{BL}{IT}$, или $\dfrac{r}{p-c} = \dfrac{p-b}{r_a}$, то есть $rr_a = (p-c)(p-b)$.

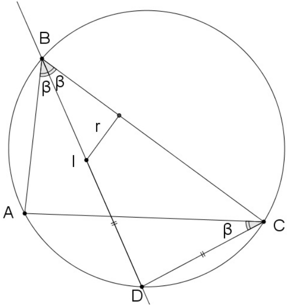
Воспользуемся формулами № 3 и №4 из предыдущего пункта для площади треугольника:

$S = pr$ и $S = r_a(p-a)$, перемножим равенства:

$S^2 = rpr_a(p-a) = p(p-a)(p-b)(p-c)$, то есть

$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$, что и требовалось доказать.

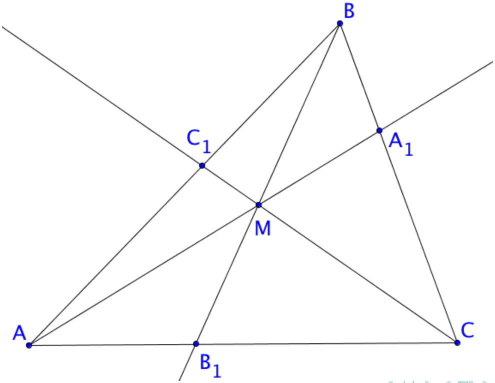
Формула Эйлера. В треугольнике ABC O - центр описанной окружности, R - радиус описанной окружности, I - центр вписанной окружности, r - радиус вписанной окружности. Докажите, что $OI^2 = R^2 - 2Rr$



Рассмотрим степень точки I относительно описанной окружности. $R^2 - OI^2 = BI \cdot ID$. Из прямоугольного треугольника получаем, что $BI = \frac{r}{sin\beta}$. По теореме синусов для треугольника BDC получаем, что $CD = 2R\sin\beta$. Остается заметить, что по лемме о трезубце $DI = DC$, откуда мы получаем, что $BI \cdot DI = \frac{r}{\sin\beta} \cdot 2R\sin\beta = 2Rr$, подставляем это выражение в степень точки: $R^2 - OI^2 = 2Rr$, откуда $OI^2 = R^2 - 2Rr$, ч. и т.д.

Теоремы Чевы и Менелая

В треугольнике ABC отрезки BB_1, AA_1 и CC_1 пересекаются в одной точке M тогда, и только тогда, когда выполняется соотношение $\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1$



Если выполняется соотношение $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, то на самом деле $\frac{a}{b} = \frac{\alpha a+\beta c}{\alpha b+\beta d}$ для любых допустимых α и β.

Доказательство леммы

Перемножим новую пропорции крест накрест:

$a(\alpha b + \beta d) = b(\alpha a + \beta c)$

Мы знаем, что $ad = bc$, применим это к полученному выражению, получим:

$\alpha ab + \beta ad = \alpha ab + \beta bc$

$\beta ad = \beta bc$, что является правдой в условиях нашей леммы.

Докажем теперь теорему слева направо: если три прямые пересекаются в одной точке, то выполняется соотношение.

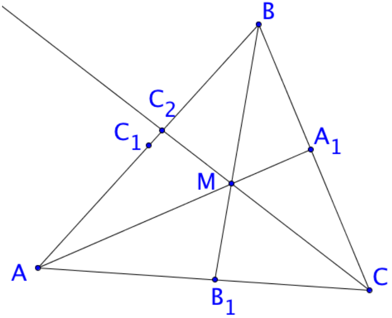
Заметим, что у треугольников ABB_1 и CBB_1 общая высота из вершины B, поэтому $\frac{S_{ABB_1}}{S_{CBB_1}} = \frac{AB_1}{CB_1}$

Аналогично, у треугольников AMB_1 и CMB_1 общая высота из вершины M, поэтому $\frac{S_{AMB_1}}{S_{CMB_1}} = \frac{AB_1}{CB_1}$

Воспользуемся алгебраической леммой:
$\frac{S_{ABB_1}}{S_{CBB_1}} = \frac{S_{AMB_1}}{S_{CMB_1}} = \frac{S_{ABB_1} - S_{AMB_1}}{S_{CBB_1} - S_{CMB_1}} = \frac{S_{AMB}}{S_{CMB}} = \frac{AB_1}{CB_1}$

Это утверждение иногда называют леммой о моли (теорема о самолетике).

Аналогично для других сторон:
$\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{S_{AMC}}{S_{BMC}}$ и $\frac{BA_1}{CA_1} = \frac{S_{AMB}}{S_{AMC}}$.
Выпишем соотношение из теоремы Чевы:
$\frac{BA_1}{C_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = \frac{S_{AMB}}{S_{AMC}} \cdot \frac{S_{BMC}}{S_{AMB}} \cdot \frac{S_{AMC}}{S_{BMC}} = 1$, что и требовалось доказать.



Докажем в обратную сторону: если выполняется соотношение, то прямые AA_1, BB_1 и CC_1 пересекаются в одной точке. Пусть это не так, пересечем AA_1 и BB_1 - точка М. Проведем луч CM, который пересечет сторону AB в точке C_2. Докажем, что C_1 совпадает с C_2.

Так как прямые AA_1, BB_1 и CC_2 проходят через одну точку, для них выполняется прямая теорема Чевы:

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_2}{BC_2} = 1$$

Также выпишем соотношение из теоремы:

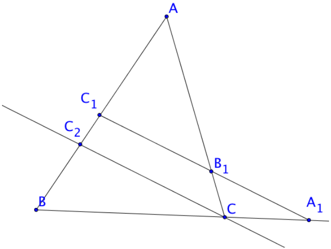
$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1$$

Тогда разделим нижнее выражение на верхнее, получим:

$\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC_2}{BC_2}$, но из этого следует, что C_1 совпадает с C_2, что и требовалось доказать.

В треугольнике ABC на прямых, содержащих стороны AB, BC и AC, отмечены соответственно точки C_1, A_1 и B_1. Точки A_1, B_1 и C_1 лежат на одной прямой тогда и только тогда, когда выполняется соотношение:

$$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1$$



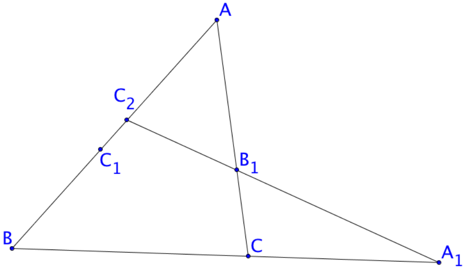
Докажем, что если точки лежат на одной прямой, ты выполняется соотношение. Для этого проведем через вершину C прямую, параллельную A_1C_1. Тогда получаем, что по теореме о пропорциональных отрезках

$$\frac{AC_1}{C_1C_2} = \frac{AB_1}{B_1C}$$

$$\frac{BC_1}{C_2C_1} = \frac{BA_1}{CA_1}$$

Подставим все это в соотношение:

$\frac{BC_1}{C_2C_1} \cdot \frac{C_1C_2}{AC_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1$, что и требовалось доказать.



Теперь в обратную сторону: если выполняется соотношение, то точки лежат на одной прямой. Допустим, это не выполняется, тогда проведем прямую A_1B_1. Пусть она пересечет сторону AB в точке C_2, тогда запишем прямую теорему Менелая для точек A_1, B_1 и C_2 и условие, которое

$\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_1}{BC_1} = 1$ и $\frac{BA_1}{CA_1} \cdot \frac{CB_1}{AB_1} \cdot \frac{AC_2}{BC_2} = 1$
Поделим первое уравнение на второе и получим: $\frac{AC_1}{BC_1} = \frac{AC_2}{BC_2}$, откуда получаем, что точки C_1 и C_2 совпадают и противоречие с предположением, что A_1, B_1 и C_1 не лежали на одной прямой. Теорема доказана.

До встречи на наших мероприятиях!

Барышев И.Н.
Матфак ВШЭ
матпрофиль школы 2101