Математическая индукция

Задачи для разбора

- Докажите, что $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \cdots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$ при любом натуральном n.
- В компании из k человек ($k > 4$) у каждого появилась новость, известная лишь ему одному. За один телефонный разговор двое сообщают друг другу все известные им новости. Докажите, что за $2k - 4$ разговора все они могут узнать все новости.
- Из клетчатого квадрата $2^n \times 2^n$ клеток вырезали одну клетку. Докажите, что полученную фигуру можно разрезать на «уголки» из трёх клеток. («Уголок» — это квадрат 2×2 без одной клетки.)

Задачи для самостоятельного решения

1. Известно, что $a_1 = 1$ и $a_{n+1} = 2a_n + 1$ при $n> 1$. Найдите a_n.
2. Докажите, что при любом натуральном n а) $2^n > n$; б) $\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}$.
3. Докажите неравенство Бернулли: $(1 + a)^n > 1 + na$, если $a > -1$ и n — натуральное число.
4. Найдите ошибку в рассуждении: «Докажем, что в любом табуне все лошади одной масти. Воспользуемся индукцией по числу лошадей в табуне. Если в табуне всего одна лошадь, то, разумеется, все лошади в этом табуне одной масти. Предположим теперь, что в любом табуне из n лошадей все лошади одной масти. Рассмотрим произвольный табун из $n + 1$ лошади. По предположению индукции любые n лошадей в этом табуне одной масти. Поэтому все лошади в табуне одной масти.»
5. Докажите, что уравнение $n^2 = 2m^2$ не имеет решений в натуральных числах.
6. Число $x + \frac{1}{x}$ — целое. Докажите, что $x^n + \frac{1}{x^n}$ — тоже целое при любом натуральном n.
7. (*Ханойские башни*) Есть детская пирамида с n кольцами и два пустых стержня той же высоты. Разрешается перекладывать верхнее кольцо с одного стержня на другой, но нельзя класть большее кольцо на меньшее. Докажите, что а) можно переложить все кольца на один из пустых стержней; б) можно сделать это за $2^n - 1$ перекладываний; в) меньшим числом перекладываний не обойтись.