# Семинар учителей математики

## Особое занятие - по ту сторону листа

Барышев Игорь Николаевич

Матфак ВШЭ

Школа 2101

1. Игральную кость бросают до тех пор, пока сумма выпавших при всех бросках очков не станет больше либо равна числу 3. Найдите вероятность того, что при последнем броске выпадет менее четырёх очков.

2. У Рассеянного Учёного в лаборатории стоит ящик, в котором 112 гаек с правой резьбой и 7 таких же с виду гаек с левой резьбой. Для создания уникальной установки Учёному потребовалось 5 гаек с левой резьбой. Он по очереди вынимает наугад гайки из ящика до тех пор, пока ему не попадутся 5 нужных гаек. Найдите математическое ожидание числа вынутых к этому моменту гаек.

3. «Задача». На доске записаны числа 1, 2, ..., 101. Какое наименьшее количество чисел надо стереть, чтобы для любых двух оставшихся чисел a и b сумма $a + b$ не делилась на $a - b$?

Если для двух оставшихся чисел $a > b$ выполнено $a - b = 1$, то условие, очевидно, нарушается, т.е. среди оставшихся чисел нет соседних. Следовательно, каждое второе число нужно вычеркнуть. Большее количество чисел останется, если мы вычеркнем четные числа и оставим нечетные: 1, 3, 5, ..., 101. Далее, если для двух оставшихся чисел $a > b$ выполнено $a - b = 2$, то $a + b$ делится на $a - b$, что противоречит условию. Тем самым, мы должны из ряда 1, 3, 5, . . . , 101 вычеркнуть каждое второе число. Оставшийся ряд из 26 чисел: 1, 5, 9, . . . , 101 удовлетворяет условию, поскольку любая разность $a - b$ делится на 4, но никакая сумма не делится на 4 (она дает остаток 2 при делении на 4).

4. На острове живут два племени: рыцари и лжецы (каждый знает, кто из какого племени). Сто жителей встали в круг. Каждый из них ответил «Да» или «Нет» на вопрос «Лжец ли ваш правый сосед?». Ответов «Да» оказалось столько же, сколько лжецов. Какое наибольшее количество лжецов могло быть в круге?

**«Ответ»:** 50 лжецов.
**«Решение».**
*Оценка.* По кругу чередуются группы из подряд стоящих лжецов и рыцарей. Ответ «Да» возникает только в парах лжец–рыцарь или рыцарь–лжец на стыке групп. Количество пар равно количеству ответов «Да», что по условию равно количеству лжецов. Значит, каждый лжец входит ровно в одну пару, пары не пересекаются, и поэтому их не более пятидесяти.

*Пример.* Чередуются рядом стоящие пары лжецов и рыцарей. «Да» ответили все, чей сосед справа из другого племени.

5. На острове живет 25 человек: рыцари, лжецы и хитрецы. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут, а хитрецы отвечают на заданные им вопросы по очереди то правду, то ложь. Все жителям острова было задано три вопроса: "Вы рыцарь? "Вы хитрец? "Вы лжец?". На первый вопрос "да"ответили 15 человек, на второй — 7 человек, на третий — 5 человек. Сколько хитрецов живет на этом острове?

Давайте разберем два варианта - первый, когда хитрецы на первый вопрос отвечают ложь, на второй правду, на третий ложь, и второй, когда все происходит наоборот.

На третий вопрос "да"могли ответить только хитрецы (лжец не может ответить "да так как это будет правдой, рыцарь не может ответить "да так как это будет ложью), значит, второй вариант невозможен (в нем хитрецы на третий вопрос отвечают правду), а в первом варианте получаем, что хитрецов всего 5. Из второго вопроса получаем, что лжецов 2, так как на этот вопрос хитрецы отвечают правду. Но тогда из первого вопроса получаем, что рыцарей на острове всего 8, так как не первый вопрос и лжецы, и хитрецы соврали. Из приведенных выше

6. При каких $n$ число $(n-1)!$ делится нацело на $n$?

## Решение

Заметим, что если $n$ - простое, то $(n-1)!$ не может делиться на $n$, так как в произведении все числа, меньше, чем $n$ и потому $n$ не может входить в разложение этих чисел на множители. Если же $n$ - составное, то существуют такие числа $p$ и $q$, что $n = p \cdot q$. В произведении $1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot (n-1)$ числа $p$ и $q$ встречаются в качестве множителей, поэтому $(n-1)!$ делится на $pq$, то есть на $n$.

Ответ: при составных $n$.

7. В равнобокую трапецию, длина диагонали которой равна 2,5, вписан круг площади $\pi$. Найдите площадь трапеции.

Пусть $ABCD$ – данная трапеция. Так как радиус круга равен 1, то высота $CM$ трапеции равна 2. Из треугольника $CAM$ получим, что $AM = 1,5$. Так как трапеция равнобокая, то отрезок $AM$ равен средней линии трапеции. Следовательно, $S = AM \cdot CM = 3$.

8. Сколько существует натуральных чисел, меньших 200, имеющих ровно 4 делителя и делящихся на 5?

У любого числа два делителя определяются однозначно: 1 и само число. Третий делитель по условию равен 5. Значит, четвертый должен быть простым числом: 3, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37. Таким образом, искомых чисел ровно 10.

9. Синус двугранного угла при боковом ребре правильной четырёхугольной пирамиды равен $\dfrac{24}{25}$. Найдите площадь боковой поверхности пирамиды, если площадь её диагонального сечения равна 12.

Пусть наша пирамида $SABCD$, проведем высоту $BH$ в треугольнике $ABS$. Поскольку пирамида правильная, то треугольники $ABS$ и $ADS$ равны, откуда $DH$ - также высота.

Заметим, что по условию $\sin BHD = \frac{24}{25}$, откуда $\cos BHD = \frac{7}{25}$. Пусть высота $BH = DH$ равна $a$, тогда по теореме косинусов получаем, что

$BD^2 = BH^2 + DH^2 - 2BH \cdot DH \cdot \cos\angle BHD$

$BD^2 = \frac{36a^2}{25}$ откуда $BD = \frac{6a}{5}$, тогда

$AB = BC = CD = AD = \frac{6a}{5\sqrt{2}}$, посчитаем по теореме Пифагора для треугольника $ABH$ длину стороны

$AH^2 = AB^2 - BH^2 = \frac{36a^2}{50} - a^2 = \frac{-7a^2}{25}$, чего не может быть, значит, такой пирамиды из условия задачи не может существовать.

## До встречи на наших мероприятиях!

Барышев И.Н.
Матфак ВШЭ
матпрофиль школы 2101