Делимость-1

1.

Докажите, что для любого натурального $n \geqslant 2$ выполнены следующие утверждения:
а) найдутся n подряд идущих составных чисел;
б) найдутся n подряд идущих натуральных чисел, среди которых ровно одно простое;
в) между n и $n!$ есть хотя бы одно простое число.

2.

Пусть $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность всех простых чисел ($p_1 = 2$, $p_2 = 3$, $p_3 = 5$, ... (кстати, почему простых чисел бесконечно много?)). Докажите, что для любого $n \geqslant 2$ справедливо неравенство $p_{n+1} < p_1 p_2 \ldots p_n$.

3.

. Найдите p, если известно, что
а) p, $p+10$, $p+14$ — простые числа;
б) p, $4p^2+1$, $6p^2+1$ — простые числа.

4. Докажите, что для любого n верны следующие утверждения:

а) $10^n + 18n - 1 \vdots 27$;
б) $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2} \vdots 17$;
в) $n^3 + 5n \vdots 6$;
г) $6^{2n+1} + 1 \vdots 7$;
д) $2^{3^n} + 1 \vdots 3^{n+1}$;
е) $(2^n - 1)^n - 3 \vdots 2^n - 3$;
ж) $\underbrace{11\ldots1}_{3^n} \vdots 3^n$.

5.

Докажите, что числа Фибоначчи обладают следующими свойствами:

а) $2 \mid F_n \Leftrightarrow 3 \mid n$;
б) $3 \mid F_n \Leftrightarrow 4 \mid n$;
в) $4 \mid F_n \Leftrightarrow 6 \mid n$;
г) $F_n \mid F_m \Leftrightarrow n \mid m$ $(n \geqslant 3)$.

6. Докажите, что простых чисел вида 4k – 1, 6k – 1 бесконечно много.