

Неравенства

Задачи для разбора

- $x^2 + 4y^2 + 9z^2 \geq 4xy + 6yz + 6zx$
- $2x^2 + 2y^2 + z^2 + 2xy + 2yz \geq 0$
- $4x^3 + 2x^2y + 3xy^2 \geq 9y^3$ (при $x \geq y$)

Неравенства о средних для двух чисел ($a, b \geq 0$)

$$\frac{2ab}{a+b} \leq \sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2}{2}}$$

Задачи для самостоятельного решения

1. Сравните числа $(\sqrt{23} - \sqrt{11})$ и $(\sqrt{22} - \sqrt{10})$
2. Докажите неравенство для любых a, b, c, d :
 - a. $a^4 - 4a^3b + 8a^2b^2 - 16ab^3 + 16b^4 \geq 0$
 - b. $(a^2 - b^2)(c^2 - d^2) \leq (ac - bd)^2$
3. $(a+b)(a+c)(b+c) \geq 8abc$, где $a, b, c > 0$
4. Докажите, что $xyzt > 0$, если $x > y^3, y > z^3, z > t^3, t > x^3$
5. Докажите неравенство при $a, b > 0$ и $a + b = 1$:
 - a. $(a + \frac{1}{a})^2 + (b + \frac{1}{b})^2 \geq \frac{25}{2}$