Семинар учителей математики

Текстовые задачи

Барышев Игорь Николаевич

Матфак ВШЭ

Школа 2101

Упражнения

1. Из Орла в Тулу выехал грузовик. Через 5 минут из Орла по той же дороге выехал легковой автомобиль. Через 10 минут после этого он обогнал грузовик и прибыл в Тулу на 15 минут раньше грузовика. Сколько времени грузовик ехал от Орла до Тулы?

2. Из двух пунктов A и B одновременно навстречу друг другу выходят два туриста. При встрече оказывается, что турист, вышедший из A, прошел на 2 километра больше, чем второй турист. Продолжая движение с той же скоростью, первый турист прибывает в B через 1 час 36 минут, а второй в A через 2 часа 30 минут после встречи. Найдите расстояние AB и скорость каждого туриста.

3. Два автомобиля выезжают одновременно навстречу друг другу из двух пунктов A и B. После встречи одному из них приходится быть в пути 2 часа, а другому 9/8 часа. Найти скорость автомобилей, если между пунктами A и B 210 км.

4. Из пунктов А и В, расстояние между которыми 15 км, одновременно навстречу друг другу выехали два велосипедиста. После их встречи велосипедист, выехавший из А, прибыл в В через 20 мин, а выехавший из В приехал в А через 45 мин. На каком расстоянии от пункта В велосипедисты встретились?

5. Из пунктов A и B навстречу друг другу одновременно отправились два поезда. Известно, что в 14:00 они встретились и, не меняя скорости, продолжили движение. Один поезд прибыл в пункт B в 18:00, а другой прибыл в пункт A в 23:00. В какой момент времени поезда отправились в путь?

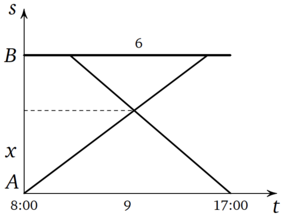
Задачи

1. Из пункта A в пункт B в 8:00 выехал велосипедист, а через некоторое время из B в A вышел пешеход. Велосипедист прибыл в B через 6 часов после выхода оттуда пешехода. Пешеход пришёл в A в 17:00 того же дня. Скорости велосипедиста и пешехода постоянны. Какую долю пути из A в B проехал велосипедист до его встречи с пешеходом?

Решение. Графики движения велосипедиста и пешехода в осях (время, расстояние) изображены на рис.

Из подобия двух треугольников с параллельными сторонами 9 и 6 получаем

$$\frac{x}{AB-x}=\frac{9}{6} \Rightarrow 2x=3AB-3x \Rightarrow x=\frac{3}{5}AB.$$



2. В 9:00 из пункта А в пункт В выехали велосипедист Петр и мотоциклист Василий, а из В в А по той же дороге выехал мотоциклист Георгий. В 10:00 мотоциклисты встретились и зашли в кафе, проведя там не менее 75 мин и расставшись в тот момент, когда Петр проезжал мимо. Продолжив движение, Василий прибыл в пункт В не позже 11:55, а Георгий прибыл в конечный пункт одновременно с Петром. Найдите время прибытия Петра и Георгия, если скорости всех участников постоянны.

На приведенном чертеже изображена схема движения участников описываемых событий: По условию задачи, $BC = 1$, обозначим $CD = a$, $DE = b$, $EF = c$, $BK : KA = \lambda$.

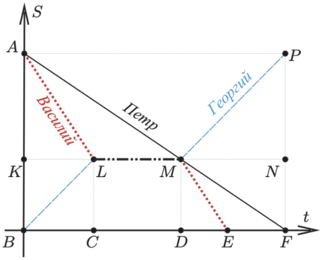


Рис. 2:

Рассматривая три пары подобных треугольников: BLC и MPN, FME и MAL, EMD и LAK, имеем

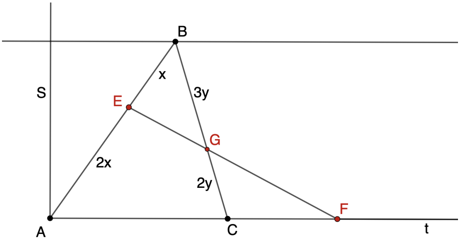
$$\lambda = \frac{1}{b+c} = \frac{c}{a} = \frac{b}{1} \quad \Rightarrow \quad b = \lambda,\ c = \frac{1}{\lambda} - \lambda,\ a = \frac{1}{\lambda^2} - 1.$$

Задействуя оставшуюся информацию, получаем неравенства $\frac{1}{\lambda^2} - 1 \geqslant \frac{5}{4}$, $\lambda + \frac{1}{\lambda^2} \leqslant \frac{35}{12}$. Первое из них дает $\lambda \leqslant \frac{2}{3}$, второе можно решать честно, а можно заметить, что $f(\lambda) = \lambda + \frac{1}{\lambda^2}$ убывает на $(0, 2/3]$, $f(2/3) = 35/12$, поэтому $\lambda = 2/3$. Стало быть, время в пути Петра и Георгия составило $a + b + c + 1 = \frac{\lambda+1}{\lambda^2} = \frac{15}{4}$.

Ответ: 12 : 45.

3. Велосипедист выехал из пункта А в пункт Б. Проехав треть пути, Василий наткнулся на выбоину, вследствие чего велосипед безнадежно вышел из строя. Не теряя времени, Василий бросил сломавшийся велосипед и пошел пешком обратно в пункт А за новым велосипедом. В момент поломки из пункта А выехал мотоциклист Григорий. На каком расстоянии от пункта А он встретит Василия, если пункт Б отстоит от пункта А на 4 км, а Василий доберется до пункта А тогда же, когда Григорий до пункта Б? Скорости велосипеда, мотоцикла и пешехода считать постоянными.

4. Ровно в 9:00 из пункта А в пункт Б выехал автомобиль. Проехав две третьих пути, наблюдательный водитель заметил, что мимо него в сторону пункта А проехал некий велосипедист. В тот самый момент, когда автомобиль прибыл в пункт Б, из пункта Б в пункт А выехал автобус. Когда до пункта А оставалось две пятых пути, не менее наблюдательный водитель автобуса заметил, что поравнялся с тем самым велосипедистом. Во сколько приедет в пункт А велосипедист, если известно, что автобус прибыл в пункт А ровно в 11:00? Скорости велосипедиста, автомобиля и автобуса считать постоянными.



Нарисуем чертеж к задаче в координатах расстояние от времени. Точка E - встреча автомобиля и велосипедиста, точка G - встреча автобуса и велосипедиста, тогда можем написать теорему Менелая для треугольника ABC и секущей EGF: $\dfrac{BE}{AE} \cdot \dfrac{AF}{CF} \cdot \dfrac{CG}{BG} = 1$

Подставим числа и получим, что $\frac{AF}{CF} = 3$. По условию от момента A до момента C прошло 2 часа, значит получаем, что $\frac{2+CF}{CF} = 3$, откуда $CF = 1$ и момент F - 12 часов.

5. Из пунктов A и B навстречу друг другу выехали одновременно два автобуса, которые встретились 2 февраля в 12:00. Найдите дату и время начала движения автобусов, если их скорости на всём пути постоянные, и один из них прибыл 3 февраля в 4:00 в пункт B, а другой прибыл 3 февраля в 13:00 в пункт A.

Один автобус после встречи двигался 16 часов, другой 25. Пусть t - время до встречи с начала движения автобусов. Из подобных треугольников (аналогично упражнениям) получаем, что $\frac{25}{t} = \frac{t}{16}$, откуда $t = 20$.

Значит, автобусы выехали 1 февраля в 16:00.

Ответ: 1 февраля в 16:00.

До встречи на наших мероприятиях!

Барышев И.Н.
Матфак ВШЭ
матпрофиль школы 2101