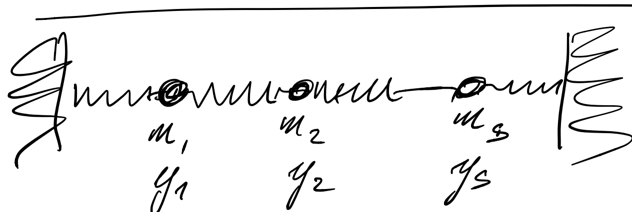
Мотивировки:

1. Описание вполне положительных матриц.
2. Вычисление топологии пересечения 2^x открытых вещественных клеток Шуберта в пространстве полных флагов
3. Комбинаторная задача: док-во целочисленности последовательностей Сомоса

Полная положительность.

Опр. Вещественная $n \times n$ матрица **вполне положительна** если все её миноры положительны.



$$y_i(t) = -\sum_j K_{ij} m_j y_j''(t)$$

Гантмахер-Крейн: (K_{ij}) - осцилляторная.

$\Rightarrow$ все миноры ≥ 0, и некоторая степень вполне положительна.

Замечание. Все собств. значения осцилляторной матрицы $\lambda_1 > \lambda_2 > \ldots \lambda_n > 0$.
и j-ый собственный вектор имеет в точности $j-1$ перемен знака.

Вопрос: Если дана вещественная $n \times n$ матрица, то можно ли описать критерий вполне положительности.

Зам. # миноров растет экспоненц.

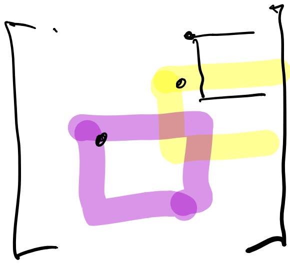
Пример. $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ 5 миноров

Достаточно проверить 4 условия.

меньше чем 4 условия не получится, так как 4 параметра.

$$\det A = ad - bc$$
$$ad = \det A + bc$$
$$\Rightarrow a, \det A, b, c > 0 \Rightarrow d > 0.$$

Обобщение на $n > 2$.



Рассмотрим F_{ij}, прилегающие либо к посл. столбцу, либо к посл. строке.
Всего n^2 элементов.

Утв. Если $F_{i,j} > 0$, то A вполне положительна.

Это следствие тождества Льюиса Кэррола.

Пример. 3×3 матрицы:

$$\Phi_1 := \{\Delta^3_3,\ \Delta^{23}_{23},\ \Delta^{123}_{123},\ \Delta^3_2,\ \Delta^3_1,\ \Delta^1_3,\ \Delta^{23}_{12},\ \Delta^1_3,\ \Delta^{12}_{23}\}$$ ← Дом зад.

$\vdots$

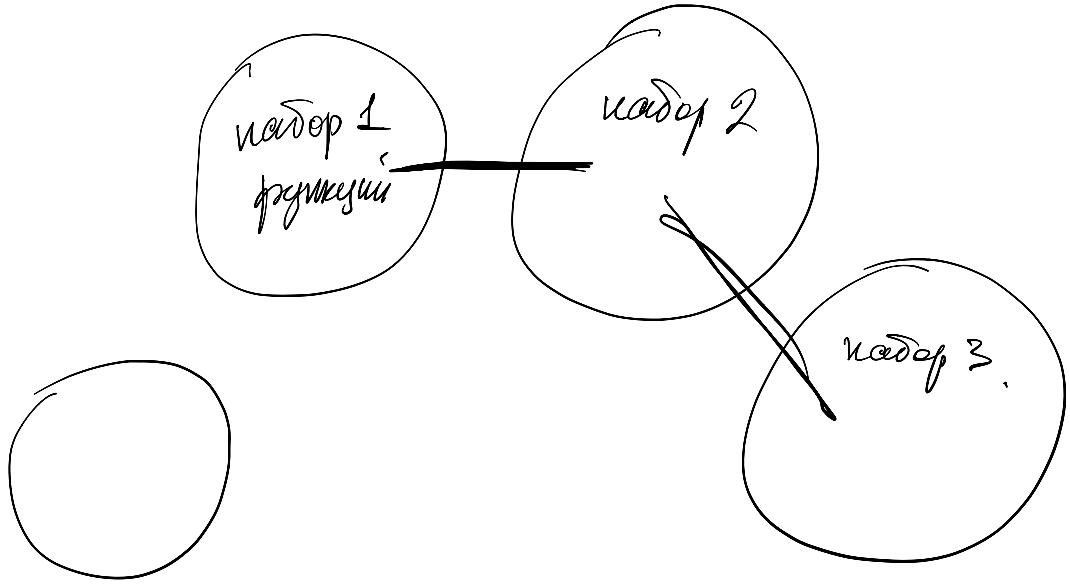
Оказывается есть другие наборы миноров.

например Φ_2: $\{\Delta^3_3,\ \Delta^{23}_{23},\ \Delta^{13}_{23},\ \Delta^{23}_{13},\ \Delta^3_1,\ \Delta^1_3,\ \Delta^{23}_{12},\ \Delta^{12}_{23},\ \Delta^{123}_{123}\}$

Φ_3: $\{\Delta^3_3,\ \Delta^{13}_{13},\ \Delta^{13}_{23},\ \Delta^{23}_{13},\ \Delta^3_1,\ \Delta^1_3,\ \Delta^{23}_{12},\ \Delta^{12}_{23},\ \Delta^{123}_{123}\}$

Lewis Carroll's тождество:

$$\Delta^{13}_{13}\cdot\Delta^{23}_{23} = \Delta^{23}_{13}\cdot\Delta^{13}_{23} + \Delta^3_3\cdot\Delta^{123}_{123}$$



2 набора соседние, если они отличаются только одной функцией.

$$f \cdot f' = M_1 + M_2$$

старая функция; новая функция; мономы от функций одинаковых в обоих наборах.

Рассматриваем сейчас верхне-треугольные матрицы.

$W = S_n$ = группа Вейля типа A_{n-1}.

$w_0 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & \dots & n \\ n & n-1 & \dots & 1 \end{pmatrix}$ — макс. элемент в W.

Зафиксируем какое нибудь приведенное разложение $w_0 = \sigma_{i_1}\sigma_{i_2}\dots\sigma_{i_s}$

σ_{i_j} = простая транспозиция. $i_j \Leftrightarrow i_j+1$

Для $n=3$, $s=3$.

$$\begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$$

$\mathbf{i}$ = слово $(i_1, i_2 \dots i_s)$

Факторизация верхне-треугольной унипотентной $n{\times}n$ матрицы в произведение элементарных матриц

$$E_{i_j}(t_j) = \begin{array}{c} \\ i_j \\ \\ \end{array}\begin{array}{c} \begin{array}{r} i_j+1 \end{array} \\ \begin{pmatrix} 1 & & & \\ & \ddots & t_j & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{pmatrix}_{n \times n} \end{array}$$

$$w_0 = \begin{pmatrix}1&2&3\\3&2&1\end{pmatrix} = \sigma_1\sigma_2\sigma_1$$

<u>Пример</u>:

$$X = \begin{pmatrix}1 & x_{12} & x_{13}\\ 0 & 1 & x_{23}\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & t_1 & 0\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ & 1 & t_2\\ & & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & t_3 & 0\\ & 1 & 0\\ & & 1\end{pmatrix}$$

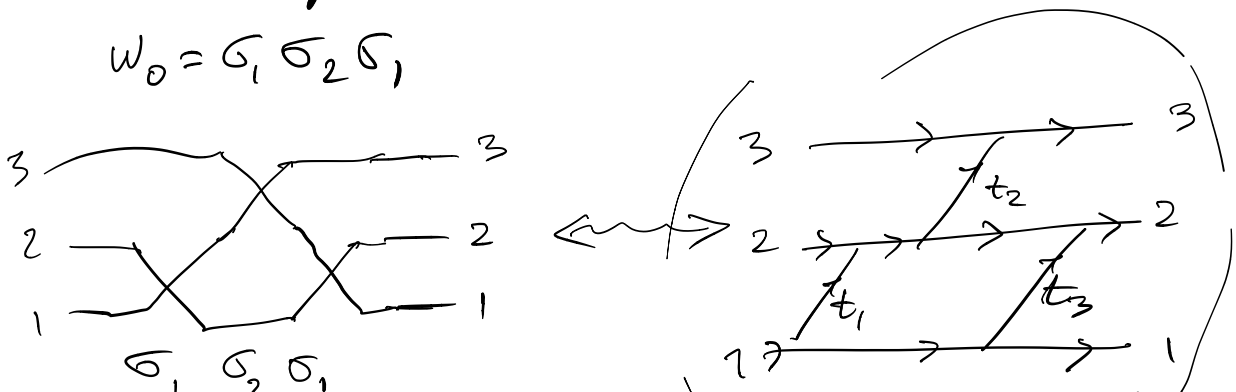
$$= \begin{pmatrix}1 & t_1+t_3 & t_1t_2\\ & 1 & t_2\\ & & 1\end{pmatrix}$$

Замечание. если $t_1, t_2, t_3 > 0$, то X = вполне положительная.

Единств. нетрив. 2×2 минор $\Delta^{23}_{12} = (t_1+t_3)t_2 - t_1 t_2 = t_2 t_3$

Диаграмма псевдолиний.

$w_0 = \sigma_1 \sigma_2 \sigma_1$



ребра ориентир. слева направо.

вес ребра $w(e)$ = t_i если t_i написано на ребре, и 1 если ничего не написано.

$$\text{вес пути} = \prod_{e \in \text{путь}} w(e)$$

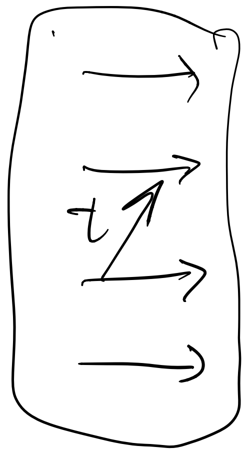
Определим граничное измерение между левым источником i и правым стоком j

$$M_{ij} = \sum_{\text{ориент. путь из } i \to j} \text{вес пути.}$$

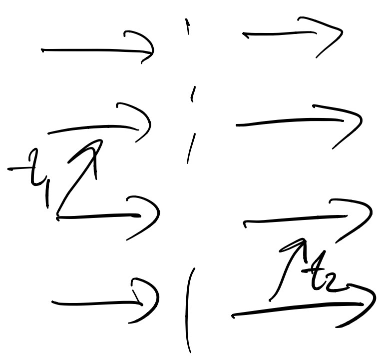
$M_{11} = 1$
$M_{12} = t_1 + t_3$
$M_{13} = t_1 t_2$

$m_{23} = t_2$

$\Rightarrow X = M$ = матрица граничных измерений.



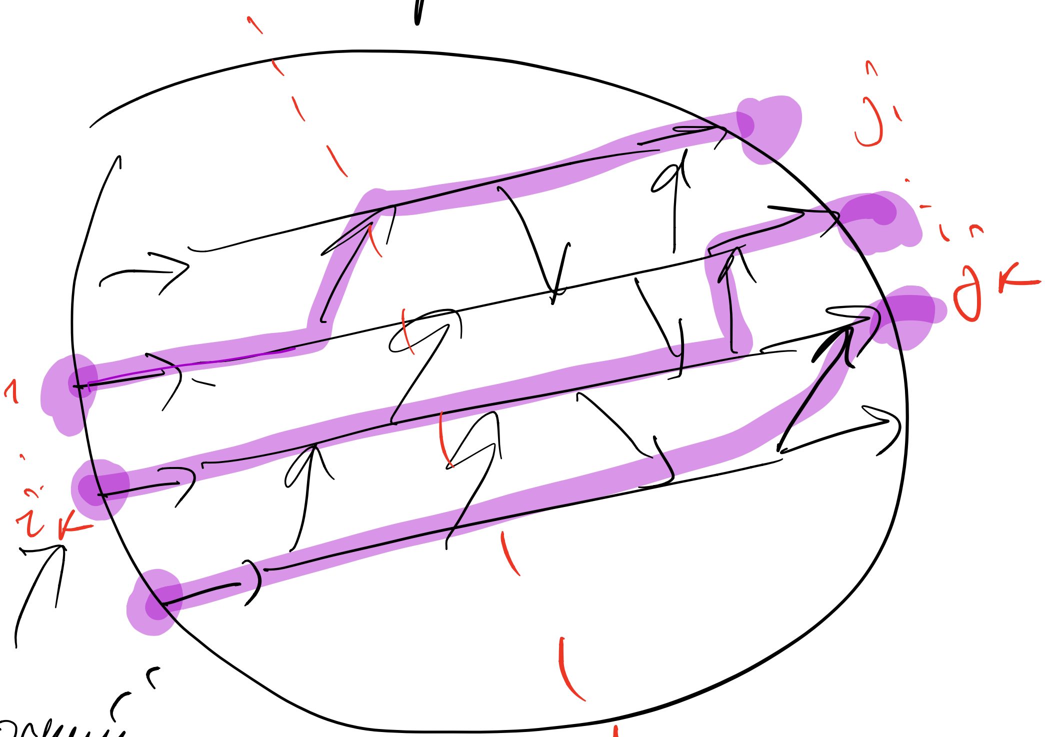
$\rightsquigarrow$ соотв. матр. гран. измерений $E_j(t)$



$\rightsquigarrow E_{j_1}(t_1)\cdot E_{j_2}(t_2)$

Факт: если $t_i \geq 0$ то любой минор матрицы граничных измерений будет ≥ 0. (следствие леммы Линдстрёма).

Лемма Линдстрёма



плоский граф с весами на ребрах с разделены входами и выходами.

минор $\Delta^{j_1 \ldots j_k}_{i_1 \ldots i_k}(M) = \sum_{\substack{\text{потокам} \\ \text{из } i_1 \ldots i_k \\ \text{в } j_1 \ldots j_k}}$ вес потока.

матрица грав. измер.

Хорошее дом. задание
Док-ть лемму Линдстрёма.

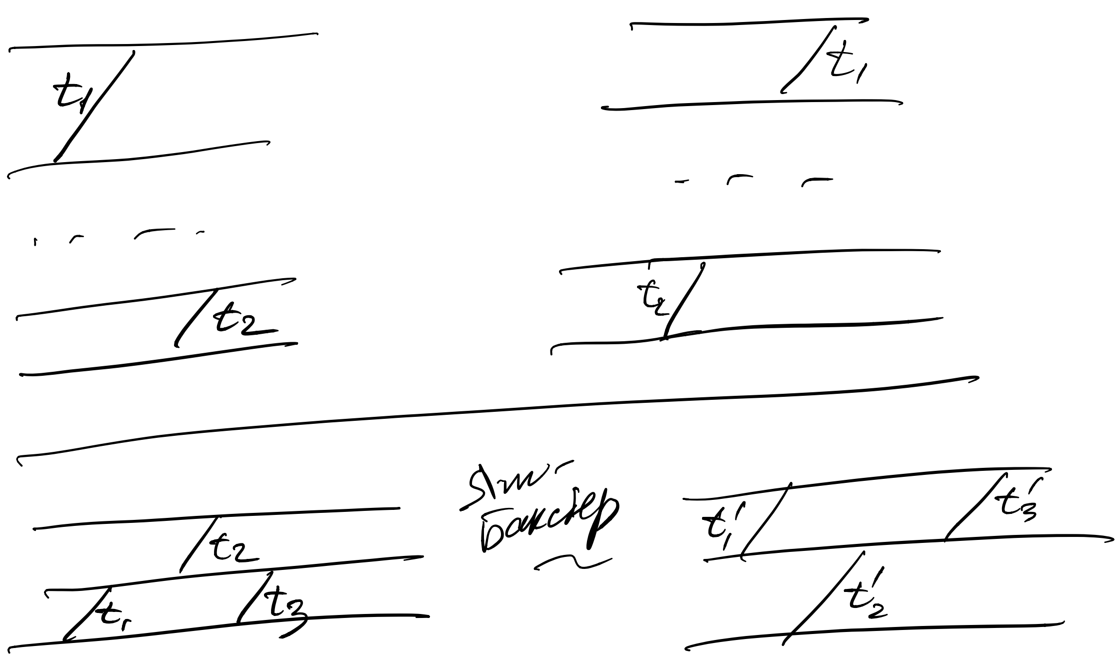
Опр. 2 приведенных разложения w_0 связаны движением Янга-Бакстера

если $\sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_k} \sigma_{i_k+1} \sigma_{i_k} \dots \sim$

$$\sim \sigma_{i_1} \dots \sigma_{i_k+1} \sigma_{i_k} \sigma_{i_k+1} \dots$$

и соотношения коммутации

$$\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{если } |i-j| \geq 2$$



Замена весов (двойственное Мостика).

$$t_1' = \frac{t_2 t_3}{t_1+t_3} \qquad t_1 = \frac{t_2' t_3'}{t_1'+t_3'}$$

$$t_2' = t_1+t_3 \qquad t_2 = t_1'+t_3'$$

$$t_3' = \frac{t_1 t_2}{t_1+t_3} \qquad t_3 = \frac{t_1' t_2'}{t_1'+t_3'}$$

$$t_1, t_2, t_3 > 0 \iff t_1', t_2', t_3' > 0.$$

<u>Вопрос</u>: допустим задано какое-то приведенное разложение и соответств. набор параметров $t_1 \ldots t_s$.

Возьмем другое приведенное разложение (данное) и соотв. набор параметров $\tilde{t}_1 \ldots \tilde{t}_s$.

Как выразить $\tilde{t}_1, \ldots, \tilde{t}_s$ через $t_1 \ldots t_s$

Беренштейн, Фомин, Зелевинский '98

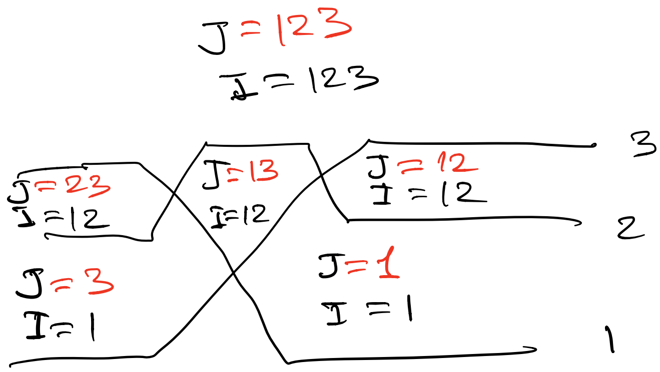
решили прямую и обратную задачи:

$(t_1, \dots, t_s)$ и прив. слово $\rightsquigarrow$ матрицу M прям. измерений.

обратная задача: восстановить $t_i(M)$ для любого слова.

<u>Пример</u>

$n=3$, $\sigma_2 \sigma_1 \sigma_2$



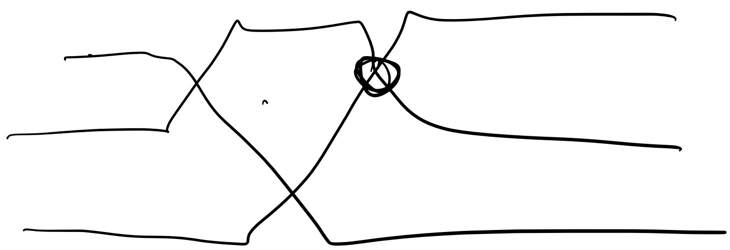
<u>Опр.</u> Твист матрицы X.

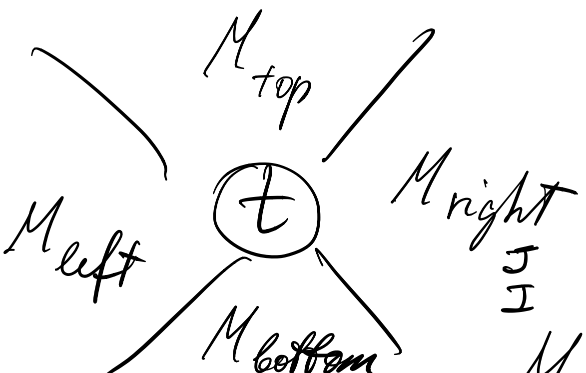
Y = твист матрицы X если

$$X = (w_0 Y^{T})_+ \qquad P = P_- D P_+$$

утв. Y_{ij} = рац. выражения от X_{ij}

Выражение для t_i:





$$t = \frac{M_{bottom}\cdot M_{top}}{M_{left}\cdot M_{right}}$$

$$M = \Delta_I^J(\underbrace{Y}_{twist(X)})$$

Пример:

$$X = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} \\ & 1 & x_{23} \\ & & 1 \end{pmatrix} \overset{twist\,Y}{\rightsquigarrow} Y = \begin{pmatrix} 1 & x_{23}/\Delta & \frac{1}{x_{13}} \\ & 1 & x_{12}/x_{13} \\ & & 1 \end{pmatrix}$$

матрица измер.

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ 1 & x_{23} \end{vmatrix}$$