

Есть функции которые все перемешивают в одночасье.



$$t = \frac{M_{\text{bottom}} \cdot M_{\text{top}}}{M_{\text{left}} \cdot M_{\text{right}}}$$

Уб.  $M_I^J$  = это линейные "твистовые" матрицы.

"Твист": бирация отображ  $tw: \mathbb{N}_+ \rightarrow \mathbb{N}_+$

если  $tw(X) = Y$ , то  $X = (W_0 \cdot Y^T)_+$

предст.  
 $W_0 =$  матрица макс. перестановки  $\in SL_n$ .

$$X = \underbrace{X_- X_0 X_+}_{\text{Гауссово разложение}}, \quad X_- \in N_-, \quad X_0 - \text{густ.}$$

$$X_+ \in N_+$$

Пример.  $X = \begin{pmatrix} 1 & x_{12} & x_{13} \\ & 1 & x_{23} \\ & & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{tw} Y = \begin{pmatrix} 1 & \frac{x_{23}}{\Delta} & \frac{1}{x_{13}} \\ & 1 & \frac{x_{12}}{x_{13}} \\ & & \frac{x_{13}}{1} \end{pmatrix}$

$$\Delta = \begin{vmatrix} x_{12} & x_{13} \\ 1 & x_{23} \end{vmatrix}$$

$M_I^J$  = минор от  $Y$  полученный из набора строк  $I$  и столбцов  $J$ .

$$X = \begin{pmatrix} 1 & t_1 + t_3 & t_1 t_2 \\ & 1 & t_2 \\ & & 1 \end{pmatrix} \quad Y = \begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{t_3} & \frac{1}{t_1 t_2} \\ 0 & 1 & \frac{t_1 + t_3}{t_1 t_2} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$M_1^2 = \frac{1}{t_3}$$

$$M_1^3 = \frac{1}{t_1 t_2}$$

$$M_{12}^{23} = \frac{1}{t_2 t_3}$$

монотонность по  $t_i$ .

Замечание.. (i)  $y_{ij}$  от  $Y = tw(X)$

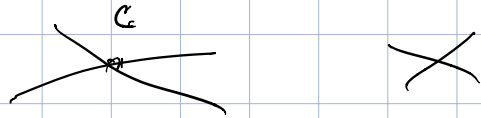
= рац. функции от  $x_{ij}$  с знаменателем  $x_{13}$  и  $\Delta = x_{12}x_{23} - x_{13}^2$  ( $L^2$ )

(ii)  $t_i =$  лоран. полюс от  $M_I^J$

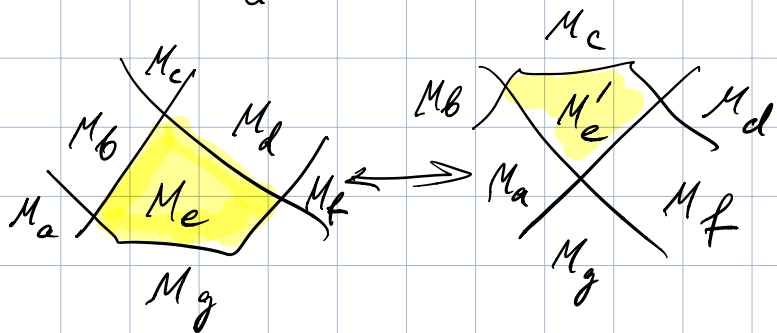
$$M_I^J > 0 \Rightarrow t_i > 0, \forall i$$

(iii) Другое привед. слово приводит к преобразованию  $M_I^J$

$$a \ c = c \ a$$



Движение  
Липа-Бакстера



Наблюдение:  $M_e \cdot M'_e = M_a M_d + M_b M_f$

дискретный  
псевдометрический

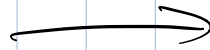


матрица  $M_{IJ}$

↓  
двум. Ф. или Бокстера

↑  
ука. только в  
одном  
месте коэф.  $\neq 0$

дискретный  
псевдометрический



$M'_{IJ}$

Применение.

Задача Арнольд ('84)

Опр. Полный флаг  $F_* = \{F^i \subset \dots \subset F^{n-1} \subset \mathbb{R}^n\}$   
 $\lim F^i = \mathbb{C}$

Опр. 2 полных флага  $F_*$  и  $G_*$

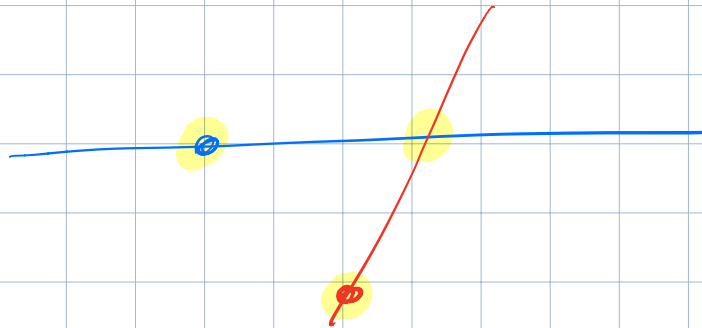
транверсальны если  $\forall i, j \quad F^i \pitchfork G^j$   
( $\dim F^i \cap G^j = \min$   
возможная)  
 $= \max(i+j-n, 0)$ )

Вопрос. Задача. 2 транверсальных  
полных флага  $F_*$  и  $G_*$ .

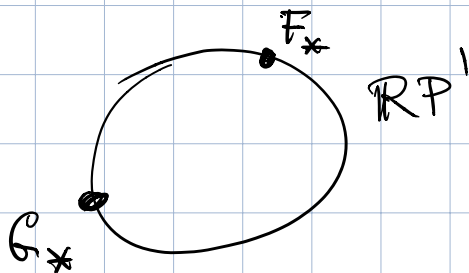
Описать топологию пространства  $T$   
полных флагов транверсальных осей  
 $F_*$  и  $G_*$ .

Замечание.  $GL_n$  действ. на  $n$ -ве  
полных флагов.  $\rightarrow GL_n$  индуцирует

транзитивное действие на парах трансв.  
полных флагов.



Пример  $n=2$ . проективизируем  
картинку.



$$\pi_0(T_2) = \mathbb{Z}_2.$$

Преобразуем задачу:

Зафикс. базис  $e_i$  в  $\mathbb{R}^n$

Пусть  $F_* = \{ \langle e_1 \rangle \subset \langle e_1, e_2 \rangle \subset \dots \}$

$$G_* = \{ \langle e_n \rangle \subset \langle e_{n-1}, e_n \rangle \subset \langle e_{n-2}, e_{n-1}, e_n \rangle \dots \}$$

Пусть  $\Phi_* = \{ \langle v_1 \rangle \subset \langle v_1, v_2 \rangle \subset \langle v_1, v_2, v_3 \rangle \dots \}$   
справ  $\{v_1, v_2\}$

$$\begin{pmatrix} v_1 & v_2 & v_3 & \dots \end{pmatrix} \text{ в базисе } e_i$$

Наблюдение  $\Phi^* \cap G^* = \text{ненулл микрораз} \neq 0$ .

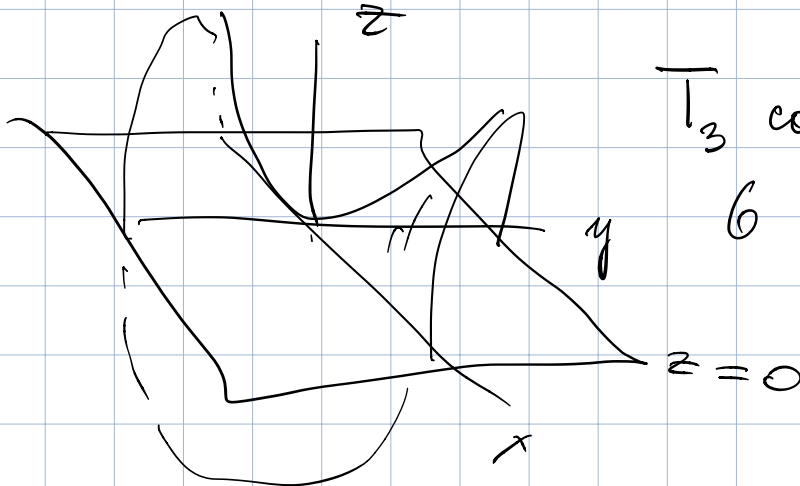
$$\Phi^* \cap F^* = \text{резовое микрораз} \neq 0$$

Для  $n=3$

$$\begin{pmatrix} 1 & & & \\ x & 1 & & \\ z & y & 1 & \end{pmatrix}$$

обтает. выполняет  
условие  $\Phi^* \cap G^*$ .

второе условие:  $\begin{cases} z \neq 0 \\ xy - z \neq 0 \end{cases}$



$T_3$  состоит из 6 неразрывных компонент.

Вопрос. Каково число компонент связности для  $n > 3$ .

$n$	2	3	4	5	$n \geq 6$
$\#_n$	2	6	20	52	$3 \times 2^{n-1}$

Известно, для  $n \geq 5$  есть неразрывная компонента.

Топология компонент неизвестна?

Идея применения кластерных координат.  
 Давайте воспользуемся параметризацией  $t_i$   
 через приведенное размещение.

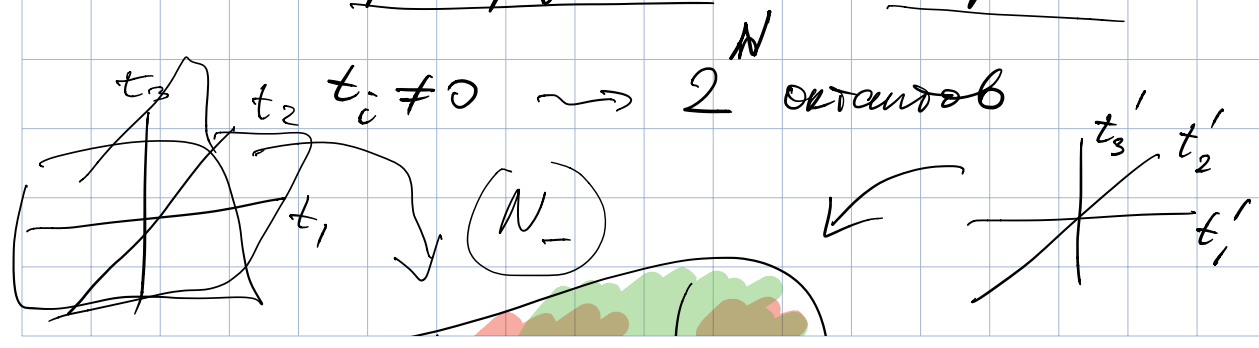
Матрица  $\overline{A}$  входит в каждую клетку  
 $M_{ij}$  для любого приведенного размещения.

(в частности, они всегда меньше  $\sigma(t_i)$ )

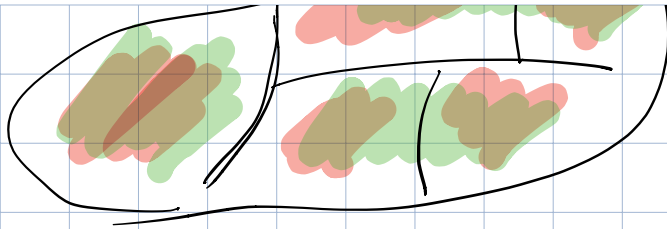
из условия  $t_i \neq 0 \Rightarrow$  матрица  $\overline{A} \neq 0$ .

Можно рассмотреть конкретные примеры  
 матриц, торсионных картелей.

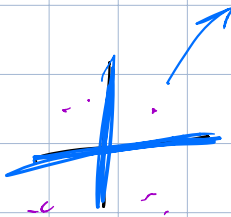
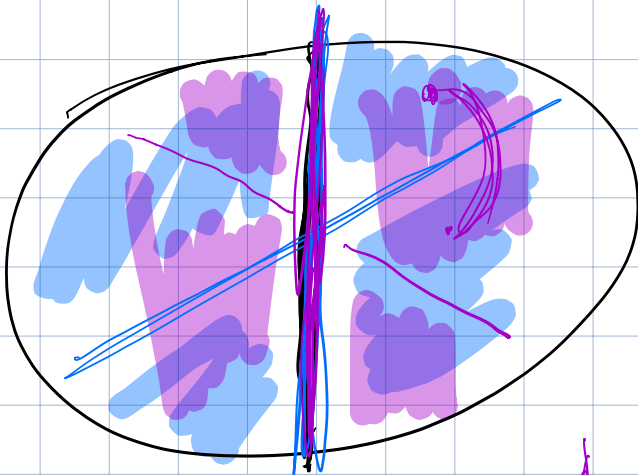
Факт. привед. размещение :  $\rightarrow$  каждой  $t_i$







другое ядро.  
разн.



Переходы между картинками:

$$M_2^2 \cdot M_2^3 = M_{12}^{23} + M_1^3$$

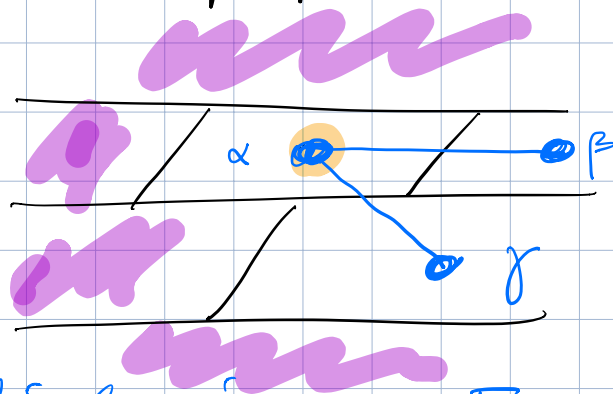
Результат: октанты одно приведенного  
разложения можно отождествить с  $F_2^M$ .

есть линейное действие на  $F_2^M$ .

Компоненты связности нумеруются  
орбитами этого действия.

---

Векторное пространство  $\mathbb{F}_2^M$ .



Двухцветный граф  $\Gamma$ :

с условием, что соседствующие  
области не соединяются друг с другом.

$M = \#$  вершин  $\Gamma$  :

В пространстве  $\mathbb{F}_2^M$  определим  
действие группы  $G_\Gamma$ .

Образующие  $g_i \in G_\Gamma$  нумеруются вершинами

$\Gamma$  в ограниченных областях

Пусть  $e_i$  будет стандартной базис в  $\mathbb{F}_2^M$ .

$$g_i(e_j) = \begin{cases} e_j, & \text{если } j \neq i \\ e_i + \sum_{(i,k) \text{ - ребро в } \Gamma} e_k \pmod{2} \end{cases}$$

Теорема. Число компонент связности

совпадает с числом орбит  $G_\Gamma$  на  $\mathbb{F}_2^M$ .  
группы.

Пример.

$\alpha$	$\beta$	$\gamma$
+	+	+
+	+	-
+	-	+
+	-	-
-	+	+
-	+	-
-	-	+
-	-	-

## Последовательности Селмса.

Рассмотрим для натурального  $r \geq 2$  бесконечную последовательность  $x_n$ , удовлетворяющую рекуррентному соотношению:

$$x_{n+r} x_0 = \begin{cases} x_{n+1} x_{n+r-1} + x_{n+2} x_{n+r-2} + \dots + x_{n+r}^2 & r = 2e \text{ чл} \\ x_{n+1} x_{n+r-1} + \dots + x_{n+(r-1)/2} x_{n+(r+1)/2} & r = \text{нечетно} \end{cases}$$

с начальными условиями  $x_1 = x_2 = \dots = x_r = 1$ .

Это наз.  $r$ -последовательность Селмса.

Например,  $r = 4$ .

$$x_{n+4} = \frac{1}{x_n} (x_{n+1} x_{n+3} + x_{n+2}^2)$$

Нач. члены выглядят как:

1, 1, 1, 1, 2, 3, 7, 23, 59, 314, ...

Набл. Все целые числа для  $r=4,5,6,7$ .

Замеч. Для  $r=8$ ,  $x_{1,7} \notin \mathbb{Z}$

Док-во основано на след. лемме:

Лемма. Любая  $x_n$  выражается

как полином Лорана от  $x_1, \dots, x_r$

для  $r=4, \dots, 7$ .

Док-во Следует из так называемой

леммы о целенности, которая явл. частью

теории кластерных алгебр.

Случаи  $r=4,5$  это частный случай кластерных алгебр.