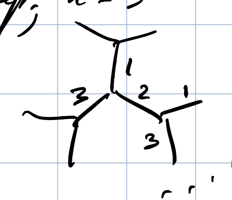
Определение кластерных алгебр.

"кососимметричная кластерная алгебра геометрического типа"

Определение – Конструкция.

- $\mathbb{T}_n$ = n-регулярное дерево (пример, $n=3$)



- все ребра занумеровать $1,\dots,n$ так что вокруг каждой вершины все номера встречаются по одному разу

- каждая вершина снабжена парой $(B, [\underbrace{f_1 \dots f_n}_{\text{кластерные переменные}}; \underbrace{f_{n+1} \dots f_{n+m}}_{\text{замороженные переменные}}])$

$n \times (n+m)$ целочисленная матрица у которой главная часть $B^{[1,n]}_{[1,n]}$ – кососимметрична

набор рац. функций от $x_1 \dots x_{n+m}$

B = матрица обмена

– выбрана начальная вершина с данными

$$(B_0, [x_1 \dots x_n; x_{n+1} \dots x_{n+m}])$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \text{кососимм.} & * \end{bmatrix}}_{n \times n} \qquad (B, [f_1 \dots f_n; f_{n+1} \dots f_{n+m}]) \overset{k}{\longleftrightarrow} (B', [f'_1 \dots f'_n; f_{n+1} \dots f_{n+m}])$$

$k \in [1,n]$ вычисляются след. соотношение:

$i \in [1,n]$, $j \in [1, n+m]$ — $$B'_{ij} = \begin{cases} -B_{ij} & \text{если } i=k \text{ или } j=k \\ B_{ij} + \dfrac{|B_{ik}|B_{kj} + B_{ik}|B_{kj}|}{2}, & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

мутация вдоль ребра k — $$f'_j = \begin{cases} f_j & \text{если } j \neq k \\ \dfrac{1}{f_k}\left(\prod\limits_{B_{kj}>0} f_j^{B_{kj}} + \prod\limits_{B_{kj}<0} f_j^{-B_{kj}}\right) \end{cases}$$

$$f_k f'_k = \prod_{B_{kj}>0} \dots + \prod_{B_{kj}<0} \dots$$

Упражнение: проверить что мутация это инволюция!

<u>Определение</u>. Подалгебра в $\mathbb{C}(x_1 \dots x_{n+m})$ порожденная всеми кластерными переменными и замороженными переменными наз. кластерной алгеброй ранга n.

$\mathcal{A}(\underline{\underline{B}})$

Терминология.

$$\overset{t}{\circ}$$

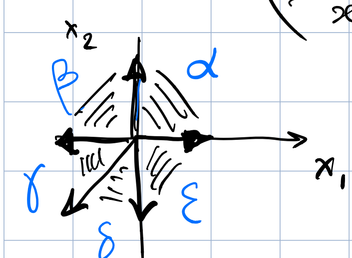
$$\underbrace{\Big(\underbrace{B(t)}_{\text{матрица обмена в вершине }(t)},\ \underbrace{[f_1(t)\dots f_n(t);\, f_{n+1}\dots f_{n+m}]}_{\text{кластер}}\Big)}_{\text{семечко в вершине } t}$$

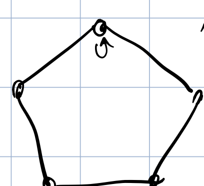
Пример. Безкоэффициентная кластерная алгебра ранга 2 с нач. матрицей обмена $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

самая наипростейшая!

	α	β	γ	δ	ε			
ребро	2	1	2	1	2	1	2	
B	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$		$\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$		
кластер	$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1+x_2}{x_1} \\ x_2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1+x_2}{x_1} \\ \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1+x_1}{x_2} \\ \frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2} \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} \frac{1+x_1}{x_2} \\ x_1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} x_2 \\ x_1 \end{pmatrix}$		

$$\frac{1+\frac{1+x_1+x_2}{x_1x_2}}{\left(\frac{1+x_2}{x_1}\right)} = \frac{(1+x_1+x_2+x_1x_2)\cancel{x_1}}{\cancel{x_1}x_2(1+x_2)} = \frac{1+x_1}{x_2}$$





— граф обменов

Наблюдения:
- мы видим только конечное число кластерных переменных
- все кластерные переменные = полиномы Лорана
- сектора порожденные показателями степеней в знаменателях покрывают всю плоскость.

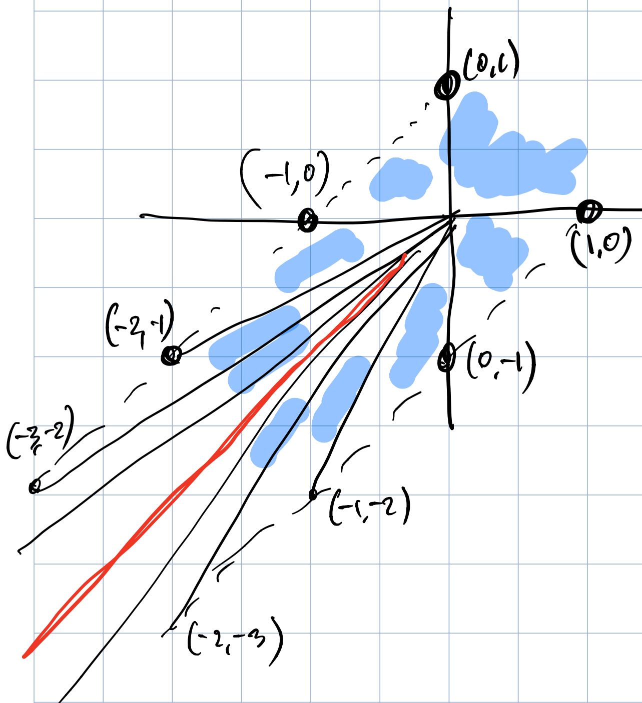
Пример 2. $B_0 = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix}$

$$\bullet \xrightarrow{1} \bullet \xrightarrow{2} \bullet \xrightarrow{1} \bullet$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1+x_2^2}{x_1} \\ x_2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1+x_2^2}{x_1} \\ \frac{1+2x_2^2+x_2^4+x_1^2}{x_1^2 x_2} \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} \frac{1+3x_2^2+3x_2^4+x_2^6+2x_1^2+x_1^4+2x_1^2x_2^2}{x_1^2 x_2^2} \\ \frac{1+2x_2^2+x_2^4+x_1^2}{x_1^2 x_2} \end{pmatrix}$$

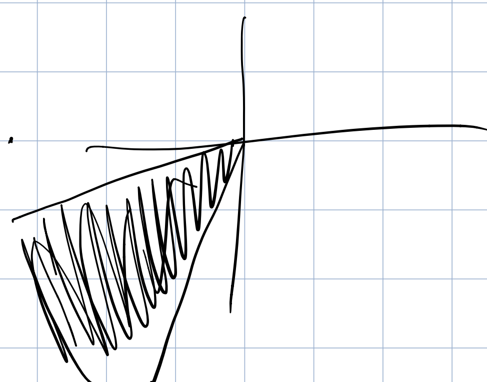
- получим бесконечное число кластерных переменных
- все кластерные переменные — полиномы Лорана
- красная диагональ не покрывается



веером знаменателей.

но конуса соответствующих разным кластерам могут пересекаться только по границе.

Замечание.



Следующая задача. Описать аддитивный базис в однородном координатном кольце грассманиана $G(2, n)$.

Опр. $G(2,n)$ = комплексное проект. многообразие 2мерных плоскостей в $\mathbb{C}^4$.

Рассмотрим аффинный конус. над плюккеровым вложением.

$g \in G(2,n)$ представлен $2\times n$ матрицей

$$\begin{pmatrix} w_{11} & \dots & w_{1n} \\ w_{21} & \dots & w_{2n} \end{pmatrix}$$

x_{ij} = Плюккерова координата $= \det\begin{pmatrix} w_{1i} & w_{1j} \\ w_{2i} & w_{2j} \end{pmatrix}$

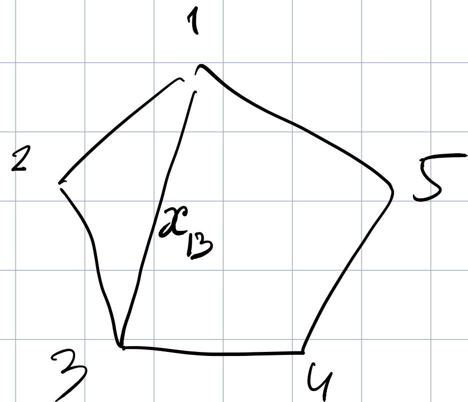
$\mathbb{C}[G(2,n)]$ порождено Плюккеровыми координатами.

Есть Плюккеровы соотношения:

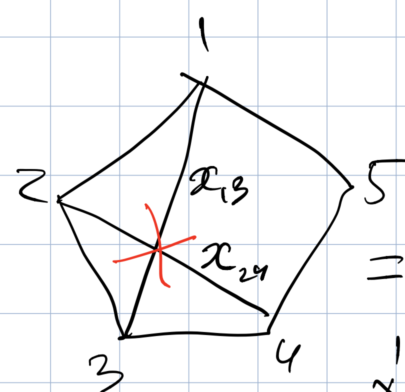
в $G(2,n)$ соотношения имеют только короткий вид: $1 \le i < j < k < l \le n$

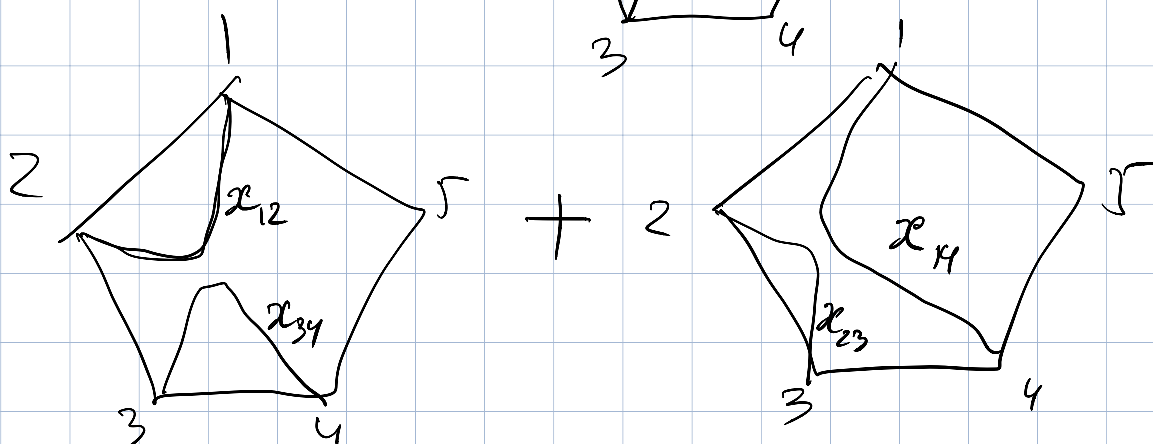
то $x_{ik} \cdot x_{jl} = x_{ij} \cdot x_{kl} + x_{il} \cdot x_{jk}$

Плюккерово соотношения описывается скейн соотношением.



Скейн соотношение:





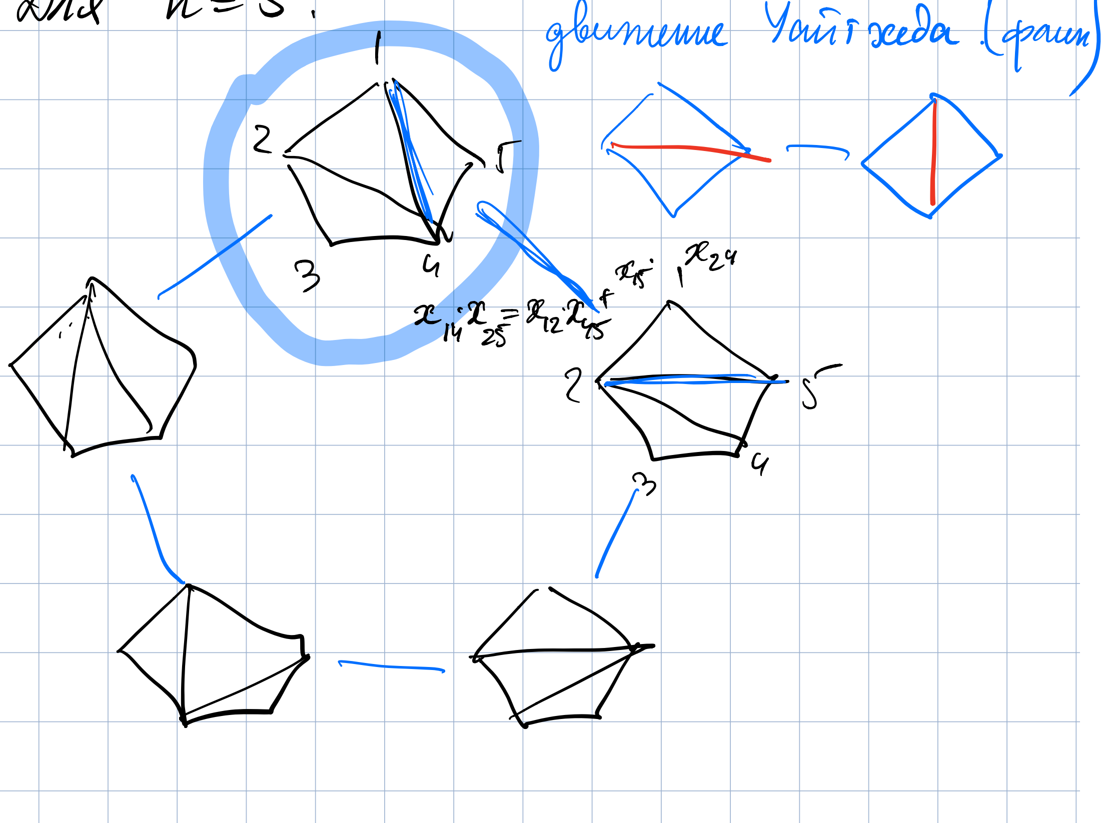
$$x_{13}\cdot x_{24} = x_{12}\cdot x_{34} + x_{23}\cdot x_{14} =$$

скейн соотношение = Плюккерово соотношение в $G(2,n)$

Thm. Аддитивный базис в $\mathbb{C}[G(2,n)]$ образован мономами от "непересек." Плюккеровых координат.

Замечание. Макс. набор непересек. диагоналей образует триангуляцию n-угольника.

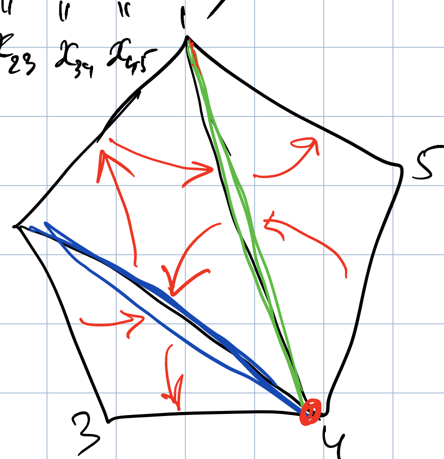
Для $n=5$.



Рассмотрим такую кластерную алгебру ранга 2:

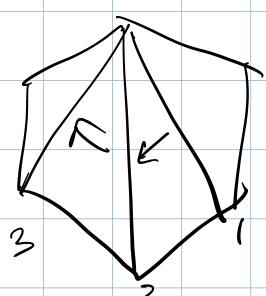
$$\left(B_0 = \left(\begin{array}{cc|ccccc} 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right),\ [x_1, x_2; x_3, x_4, x_5, x_6, x_7]\right)$$

$$x_1 = x_{14},\quad x_2 = x_{24},\quad x_3 = x_{12},\quad x_4 = x_{23},\quad x_5 = x_{34},\quad x_6 = x_{45},\quad x_7 = x_{15}$$



__Утв.__ Соотв. кластерная алгебра $= \mathbb{C}[G(2,5)]$

__Замечание.__ Безкоэфф. A_2 получается если положить все замор. переменные $x_3 = x_4 = \ldots = x_7 = 1$.



$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & \\ -1 & 2 & -1 \\ & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$