

# Неравенства

1. Докажите, что при  $x \geq 0$  выполняется неравенство  $3x^3 - 6x^2 + 4 \geq 0$ .
2. Докажите, что при  $a, b, c \geq 0$  имеет место неравенство  $(ab + bc + ca)^2 \geq 3abc(a + b + c)$ .
3. Известно, что  $a, b, c$  - положительные числа, такие что  $ab + ac + bc \geq 12$ . Докажите, что  $a + b + c \geq 6$ .
4.  $a, b, c, d$  - положительные числа. Докажите, что  $(a + b + c + d)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + \frac{1}{d}\right) \geq 16$ .
5. Дано четыре положительных числа  $a, b, c, d$ , произведение которых равно 1. Доказать, что  $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ad + ac + bc + ab + bd + cd \geq 10$ .
6. Докажите, что для любых положительных чисел  $x$  и  $y$  справедливо неравенство  $\frac{x}{x^4 + y^2} + \frac{y}{y^4 + x^2} \leq \frac{1}{xy}$ .
- 7\*.  $a, b, c$  - положительные числа. Докажите, что  $\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geq \frac{3}{2}$ .

*Подсказка по 7 задаче: обозначьте  $a + b + c = S$  и воспользуйтесь неравенством между средним гармоническим и средним арифметическим*