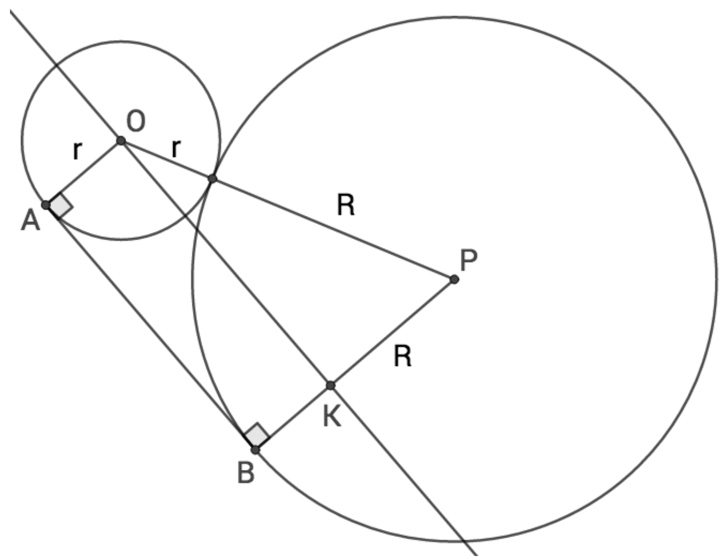
Общая касательная касающихся окружностей

Для двух касающихся внешним образом окружностей с радиусами R и r длина общей внешней касательной равна $2\sqrt{Rr}$.



Доказательство

Рассмотрим касающиеся окружности с центрами O и P и радиусами r и R. Проведем общую внешнюю касательную AB и через центр меньшей окружности проведем прямую, пааллельную данной касательной, тогда $AOKB$ - прямоугольник (параллелограмм с прямым углом), тогда $PK = R - r$.

Напишем теорему Пифагора для треугольника OPK: $OK^2 + (R-r)^2 = (R+r)^2$, откуда получаем, что $OK = 2\sqrt{Rr}$, так как $AB = OK = 2\sqrt{Rr}$, получаем то, что требовалось доказать.

Задачи

1. Пусть окружности с центром O_1 и O_2 касаются в точке K. Докажите, что $\angle AKB = 90^\circ$, где A и B - точки касания общей внешней касательной.

2. Пусть M - точка пересечения общей внутренней касательной в точке K к двум окружностям из предыдущей задачи и касательной AB. Докажите, что MO_1O_2 - прямоугольный треугольник и $MK = \sqrt{Rr}$.

3. Две окружности разных радиусов касаются внешним образом. К ним проведены две общие внешние касательные AC и BD. Их точки касания с меньшей окружностью

— A и B, с большей окружностью — C и D. Найдите радиусы окружностей, если известно, что $AB = 24/5$, $AC = 12$.

4. В прямоугольном треугольнике ABC с прямым углом C известны стороны $AC = 12$, $BC = 5$. Окружность радиуса $\frac{1}{2}$ с центром O на стороне BC проходит через вершину C. Вторая окружность касается катета AC, гипотенузы треугольника и внешним образом касается первой окружности.

а). Докажите, что радиус второй окружности меньше, чем $\frac{1}{5}$ длины катета AC.

б). Найдите радиус второй окружности.