Модальные логики хорновых замыканий случайной шкалы Крипке

Слюсарев Владислав Владимирович

Современные проблемы математической логики
Высшая школа экономики

03.02.2023

Алфавит: $PV \cup \{(,\ ),\ \bot,\ \to, \Box\}$
$PV = \{p_1,\ p_2,\ \ldots\}$ — пропозициональные переменные

Формулы: $\phi ::= \bot \mid p \mid (\phi_1 \to \phi_2) \mid \Box\phi$

Сокращения:

- $\Diamond\phi \equiv \neg\Box\neg\phi$
- $\top,\ \wedge,\ \vee,\ \neg,\ \leftrightarrow$

$\mathcal{ML}$ — множество всех модальных формул

Шкала Крипке:
$F = (W, R): \ R \subseteq W \times W$

Модель Крипке:
$M = (F, V) \ V : PV \to 2^W$ — оценка

Истинность формулы в точке модели $M = (W, R, V)$ — модель Крипке, $x \in W$

- $M, x \not\models \bot$
- $M, x \models p \iff x \in V(p)$
- $M, x \models \phi \to \psi \iff M, x \not\models \phi$ или $M, x \models \psi$
- $M, x \models \Box\phi \iff \forall y \in W \ (xRy \implies M, y \models \phi)$

Формула ϕ истинна в точке $x \in W$	$M, x \models \phi$	
Формула ϕ общезначима в модели	$M \models \phi$	$\forall x \in W \ M, x \models \phi$
Формула ϕ общезначима в шкале	$F \models \phi$	$\forall V \ (F, V) \models \phi$

Логика класса шкал Крипке $\mathcal{F}$

$$\mathrm{Log}\ \mathcal{F} := \{\phi \mid \forall F \in \mathcal{F}\ (F \models \phi)\}$$

Многообразие множества формул Γ

$$\mathrm{Var}\ \Gamma := \{F \mid \forall \phi \in \Gamma\ (F \models \phi)\}^*$$

Определение

Пусть

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство,
- $(E, \mathcal{E})$ — измеримое пространство.

Измеримое отображение $X : \Omega \to E$ называется случайным элементом со значениями в E.

Определение

Пусть

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство,
- $(E, \mathcal{E})$ — измеримое пространство.

Измеримое отображение $X : \Omega \to E$ называется случайным элементом со значениями в E.

Как определить случайный элемент со значениями в классе шкал Крипке?

Определение

Пусть

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство,
- $(E, \mathcal{E})$ — измеримое пространство.

Измеримое отображение $X : \Omega \to E$ называется случайным элементом со значениями в E.

Как определить случайный элемент со значениями в классе шкал Крипке?

- Класс всех шкал Крипке не может быть измеримым пространством

Определение

Пусть

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство,
- $(E, \mathcal{E})$ — измеримое пространство.

Измеримое отображение $X : \Omega \to E$ называется <u>случайным элементом</u> со значениями в E.

Как определить случайный элемент со значениями в классе шкал Крипке?

- Класс всех шкал Крипке не может быть измеримым пространством
- Все конечные шкалы Крипке образуют бесконечное множество

Определение

Пусть

- $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — вероятностное пространство,
- $(E, \mathcal{E})$ — измеримое пространство.

Измеримое отображение $X : \Omega \to E$ называется случайным элементом со значениями в E.

Как определить случайный элемент со значениями в классе шкал Крипке?

- Класс всех шкал Крипке не может быть измеримым пространством
- Все конечные шкалы Крипке образуют бесконечное множество
- Шкалы Крипке на n точках образуют конечное множество

Измеримое пространство шкал Крипке на n точках:

$$W_n = \{1, \ldots, n\}$$
$$\mathcal{F}_n = \{(W_n, R) \mid R \subseteq W_n \times W_n\}$$

Измеримое пространство шкал Крипке на n точках:

$$W_n = \{1, \dots, n\}$$
$$\mathcal{F}_n = \{(W_n, R) \mid R \subseteq W_n \times W_n\}$$

- $2^{\mathcal{F}_n}$ — сигма-алгебра.

Измеримое пространство шкал Крипке на n точках:

$$W_n = \{1, \ldots, n\}$$
$$\mathcal{F}_n = \{(W_n, R) \mid R \subseteq W_n \times W_n\}$$

- $2^{\mathcal{F}_n}$ — сигма-алгебра.
- $(\mathcal{F}_n, 2^{\mathcal{F}_n})$ — измеримое пространство.

Случайная шкала Крипке на n точках — случайный элемент со значениями в $\mathcal{F}_n$.

Случайная шкала Крипке на n точках — случайный элемент со значениями в $\mathcal{F}_n$.

Случайная шкала Крипке на n точках — случайный элемент со значениями в $\mathcal{F}_n$.

- Существует бесконечно много случайных шкал Крипке.

Случайная шкала Крипке на n точках — случайный элемент со значениями в $\mathcal{F}_n$.

- Существует бесконечно много случайных шкал Крипке.
- Зафиксируем распределение — вероятностную меру $\mathsf{P} : 2^{\mathcal{F}_n} \to [0, 1]$

Случайная шкала Крипке на n точках — случайный элемент со значениями в $\mathcal{F}_n$.

- Существует бесконечно много случайных шкал Крипке.
- Зафиксируем распределение — вероятностную меру $\mathrm{P} : 2^{\mathcal{F}_n} \to [0, 1]$
- Один из способов это сделать — указать вероятность наблюдения каждой фиксированной шкалы: $\mathrm{P}\left(\{X = F\}\right), F \in \mathcal{F}_n$

Равномерное распределение на $\mathcal{F}_n$

$$\forall F \in \mathcal{F}_n :\ \mathrm{P}(\{X = F\}) = \frac{1}{|\mathcal{F}_n|} = \frac{1}{2^{n^2}}$$

Равномерное распределение на $\mathcal{F}_n$

$$\forall F \in \mathcal{F}_n : \ \mathrm{P}(\{X = F\}) = \frac{1}{|\mathcal{F}_n|} = \frac{1}{2^{n^2}}$$

Определение

Стандартной случайной шкалой Крипке F_n^r назовём случайную шкалу Крипке на n точках с равномерным распределением на $\mathcal{F}_n$.

Как устроена $F_n^r = (W_n, R)$?

Как устроена $F_n^r = (W_n, R)$?

- Стрелки проводятся независимо с вероятностью $\frac{1}{2}$:

$$\mathrm{P}(\{xRy\}) = \mathrm{P}(\{x\overline{R}y\}) = \frac{1}{2} \quad \forall x,\, y \in W_n.$$

Как устроена $F_n^r = (W_n, R)$?

- Стрелки проводятся независимо с вероятностью $\frac{1}{2}$:

$$\mathrm{P}(\{xRy\}) = \mathrm{P}(\{x\overline{R}y\}) = \frac{1}{2} \quad \forall x, y \in W_n.$$

Доказательство:

$$\mathrm{P}(\{xRy\}) =$$

Как устроена $F_n^r = (W_n,\ R)$?

- Стрелки проводятся независимо с вероятностью $\frac{1}{2}$:

$$\mathrm{P}(\{xRy\}) = \mathrm{P}(\{x\overline{R}y\}) = \frac{1}{2} \quad \forall x,\ y \in W_n.$$

Доказательство:

$$\mathrm{P}(\{xRy\}) = \frac{|\{(W_n,\ R) \in \mathcal{F}_n :\ xRy\}|}{\mathcal{F}_n} =$$

Как устроена $F_n^r = (W_n,\ R)$?

- Стрелки проводятся независимо с вероятностью $\frac{1}{2}$:

$$\mathrm{P}(\{xRy\}) = \mathrm{P}(\{x\overline{R}y\}) = \frac{1}{2} \quad \forall x,\ y \in W_n.$$

Доказательство:

$$\mathrm{P}(\{xRy\}) = \frac{|\{(W_n,\ R) \in \mathcal{F}_n :\ xRy\}|}{\mathcal{F}_n} = \frac{2^{n^2-1}}{2^{n^2}} =$$

Как устроена $F_n^r = (W_n,\ R)$?

- Стрелки проводятся независимо с вероятностью $\frac{1}{2}$:

$$\mathrm{P}(\{xRy\}) = \mathrm{P}(\{x\overline{R}y\}) = \frac{1}{2} \quad \forall x,\ y \in W_n.$$

Доказательство:

$$\mathrm{P}(\{xRy\}) = \frac{|\{(W_n,\ R) \in \mathcal{F}_n :\ xRy\}|}{\mathcal{F}_n} = \frac{2^{n^2-1}}{2^{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

Как устроена $F_n^r = (W_n,\ R)$?

- Стрелки проводятся независимо с вероятностью $\frac{1}{2}$:

$$\mathrm{P}(\{xRy\}) = \mathrm{P}(\{x\overline{R}y\}) = \frac{1}{2} \quad \forall x,\ y \in W_n.$$

Доказательство:

$$\mathrm{P}(\{xRy\}) = \frac{|\{(W_n,\ R) \in \mathcal{F}_n :\ xRy\}|}{\mathcal{F}_n} = \frac{2^{n^2-1}}{2^{n^2}} = \frac{1}{2}.$$

- Вероятность конфигурации из n фиксированных стрелок

$$\mathrm{P}(\{x_1 S_1 y_1,\ \ldots,\ x_n S_n y_n\}) = 2^{-n}, \quad S_j \in \{R,\ \overline{R}\}$$

Пример: вероятность того, что R сериально.

$\mathrm{P}(\{R \text{ сериально}\})$

Пример: вероятность того, что R сериально.

$$\mathrm{P}(\{R \text{ сериально}\}) = \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n} \{R(x_i) \neq \varnothing\}\right)$$

Пример: вероятность того, что R сериально.

$$\mathrm{P}(\{R \text{ сериально}\}) = \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{R(x_i) \neq \varnothing\}\right)$$
$$= \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{n}\{x_i R x_j\}\right)$$

Пример: вероятность того, что R сериально.

$$\begin{aligned}
\mathsf{P}(\{R \text{ сериально}\}) &= \mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{R(x_i) \neq \varnothing\}\right) \\
&= \mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{n}\{x_i R x_j\}\right) \\
&= \mathsf{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\left(\overline{\bigcap_{j=1}^{n}\{x_i \overline{R} x_j\}}\right)\right)
\end{aligned}$$

Пример: вероятность того, что R сериально.

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}(\{R\ \text{сериально}\}) &= \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{R(x_i)\neq\varnothing\}\right)\\
&= \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{n}\{x_iRx_j\}\right)\\
&= \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\left(\overline{\bigcap_{j=1}^{n}\{x_i\overline{R}x_j\}}\right)\right)\\
&= \prod_{i=1}^{n}\left(1-\prod_{j=1}^{n}\mathrm{P}(x_i\overline{R}x_j)\right) = (1-2^{-n})^{n}.
\end{aligned}$$

Пример: вероятность того, что R сериально.

$$\mathrm{P}(\{R \text{ сериально}\}) = \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\{R(x_i) \neq \varnothing\}\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\bigcup_{j=1}^{n}\{x_i R x_j\}\right)$$

$$= \mathrm{P}\left(\bigcap_{i=1}^{n}\left(\overline{\bigcap_{j=1}^{n}\{x_i \overline{R} x_j\}}\right)\right)$$

$$= \prod_{i=1}^{n}\left(1 - \prod_{j=1}^{n}\mathrm{P}(x_i \overline{R} x_j)\right) = (1 - 2^{-n})^n\,.$$

Заметим, что при $n \to \infty$:

$$\mathrm{P}(\{R \text{ сериально}\}) = \left(1 - 2^{-n}\right)^n \sim 1 - n2^{-n} \to 1.$$

Определение

Пусть $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность случайных событий. Говорим, что A выполняется <u>асимптотически почти наверное (а.п.н.)</u>, если $\lim_{n \to \infty} \mathrm{P}(A_n) = 1$.

Определение

Пусть $A = (A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность случайных событий. Говорим, что A выполняется асимптотически почти наверное (а.п.н.), если $\lim_{n\to\infty} \mathrm{P}(A_n) = 1$.

В предыдущем примере $F_n^r \models AD$ а.п.н.

Определение

Пусть $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность случайных событий. Говорим, что A выполняется асимптотически почти наверное (а.п.н.), если $\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n) = 1$.

В предыдущем примере $F_n^r \models AD$ а.п.н.

Обозначим $F_n^r \models^{\mathsf{as}} \varphi$, если $\lim_{n\to\infty} p(F_n^r \models \varphi) = 1$.

Определение

Пусть $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ — последовательность случайных событий. Говорим, что A выполняется асимптотически почти наверное (а.п.н.), если $\lim_{n\to\infty} \mathsf{P}(A_n) = 1$.

В предыдущем примере $F_n^r \models AD$ а.п.н.

Обозначим $F_n^r \models^{\mathsf{as}} \varphi$, если $\lim_{n\to\infty} p(F_n^r \models \varphi) = 1$.

Что можно сказать о множестве $\mathsf{K}^{\mathsf{as}} := \{\varphi \in \mathcal{ML} \mid F_n^r \models^{\mathsf{as}} \varphi\}$?

Почти достоверные истины в классе конечных шкал

$$\mathsf{K}^{\mathsf{as}} := \{\varphi \in \mathcal{ML} \mid F_n^r \models^{\mathsf{as}} \varphi\}$$

Goranko, Valentin. *“The Modal Logic of Almost Sure Frame Validities in the Finite.”* Advances in Modal Logic (2020).

Утверждение

K^{as} — нормальная модальная логика.

Почти достоверные истины в классе конечных шкал

$$\mathsf{K}^{\mathsf{as}} := \{\varphi \in \mathcal{ML} \mid F_n^r \models^{\mathsf{as}} \varphi\}$$

Goranko, Valentin. *"The Modal Logic of Almost Sure Frame Validities in the Finite."* Advances in Modal Logic (2020).

Утверждение

K^{as} — нормальная модальная логика.

- Тавтологии и аксиома нормальности верны в любом наблюдении F_n^r

$$\mathrm{K}^{\mathrm{as}} := \{\varphi \in \mathcal{ML} \mid F_n^r \models^{\mathrm{as}} \varphi\}$$

Goranko, Valentin. *"The Modal Logic of Almost Sure Frame Validities in the Finite."* Advances in Modal Logic (2020).

Утверждение

K^{as} — нормальная модальная логика.

- Тавтологии и аксиома нормальности верны в любом наблюдении F_n^r
- Правила вывода...

$$\mathsf{K}^{as} := \{\varphi \in \mathcal{ML} \mid F_n^r \models^{as} \varphi\}$$

Goranko, Valentin. *"The Modal Logic of Almost Sure Frame Validities in the Finite."* Advances in Modal Logic (2020).

Утверждение

K^{as} — нормальная модальная логика.

- Тавтологии и аксиома нормальности верны в любом наблюдении F_n^r
- Правила вывода...

$$F_n^r \models^{as} \varphi \qquad\qquad F_n^r \models^{as} \varphi \to \psi$$

Почти достоверные истины в классе конечных шкал

$$\mathsf{K}^{\mathsf{as}} := \{\varphi \in \mathcal{ML} \mid F_n^r \models^{\mathsf{as}} \varphi\}$$

Goranko, Valentin. *“The Modal Logic of Almost Sure Frame Validities in the Finite.”* Advances in Modal Logic (2020).

Утверждение

K^{as} — нормальная модальная логика.

- Тавтологии и аксиома нормальности верны в любом наблюдении F_n^r
- Правила вывода...

$$\frac{F_n^r \models^{\mathsf{as}} \varphi}{\mathsf{P}\{F_n^r \models \varphi\} \to 1} \qquad \frac{F_n^r \models^{\mathsf{as}} \varphi \to \psi}{\mathsf{P}\{F_n^r \models \varphi \to \psi\} \to 1}$$

Почти достоверные истины в классе конечных шкал

$$F_n^r \models^{as} \varphi \qquad\qquad F_n^r \models^{as} \varphi \to \psi$$

Почти достоверные истины в классе конечных шкал

$$\begin{array}{ll} F_n^r \models^{\mathsf{as}} \varphi & F_n^r \models^{\mathsf{as}} \varphi \to \psi \\ \mathsf{P}\{F_n^r \models \varphi\} \to 1 & \mathsf{P}\{F_n^r \models \varphi \to \psi\} \to 1 \end{array}$$

$$F_n^r \models^{\mathrm{as}} \varphi \qquad F_n^r \models^{\mathrm{as}} \varphi \to \psi$$
$$\mathrm{P}\{F_n^r \models \varphi\} \to 1 \quad \mathrm{P}\{F_n^r \models \varphi \to \psi\} \to 1$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдём $n \in \mathbb{N}$, начиная с которого

$$\mathrm{P}\{F_n^r \not\models \varphi\} < \varepsilon,$$
$$\mathrm{P}\{F_n^r \not\models \varphi \to \psi\} < \varepsilon.$$

Почти достоверные истины в классе конечных шкал

$$
\begin{array}{ll}
F_n^r \models^{\mathsf{as}} \varphi & F_n^r \models^{\mathsf{as}} \varphi \to \psi \\
\mathsf{P}\{F_n^r \models \varphi\} \to 1 & \mathsf{P}\{F_n^r \models \varphi \to \psi\} \to 1
\end{array}
$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и найдём $n \in \mathbb{N}$, начиная с которого

$$
\mathsf{P}\{F_n^r \not\models \varphi\} < \varepsilon,
$$
$$
\mathsf{P}\{F_n^r \not\models \varphi \to \psi\} < \varepsilon.
$$

Тогда

$$
\mathsf{P}\{F_n^r \not\models \{\varphi, \varphi \to \psi\}\} \leq 2\varepsilon.
$$
$$
\implies \mathsf{P}\{F_n^r \not\models \psi\} \leq 2\varepsilon.
$$

Задача

Задать K^{as} набором аксиом.

Задача

Задать K^{as} набором аксиом.

Неполная аксиоматика для K^{as} :

- $\mathsf{ML^r}_2 := \Box^2 p \to p$;
- $\mathsf{ML^r}_3 := \Box^2 p \to \Box^3 p$;
- $\mathsf{ML^r}_4 := p \to \Box^2 \Diamond^2 p$;
- $MODEXT_n := \bigwedge_{i=1}^{n} \Diamond^2 (p_i \wedge \Box q_i) \to \Diamond^2 \bigwedge_{i=1}^{n} (\Diamond p_i \wedge q_i)$,

  где $n \in \mathbb{N}$.

Утверждение

$\mathsf{ML^r} := \mathsf{K} + \mathsf{ML^r}_2 + \mathsf{ML^r}_3 + \mathsf{ML^r}_4 + \{MODEXT_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathsf{K}^{as}$.

Определим семейство свойств EXT_k.
Пусть...

- $F = (W, R)$ — шкала Крипке;
- $A, B \subseteq \{1, \ldots, k\}$;
- $c \in \{\top, \bot\}$;
- $u_1, \ldots, u_k$ — некоторые различные точки шкалы (W, R).

Тогда существует точка $v \in W$, такая что

- $u_j R v \iff j \in A$;
- $v R u_j \iff j \in B$;
- $v R v \iff c$.

Определим семейство свойств EXT_k.
Пусть...

- $F = (W, R)$ — шкала Крипке;
- $A, B \subseteq \{1, \ldots, k\}$;
- $c \in \{\top, \bot\}$;
- $u_1, \ldots, u_k$ — некоторые различные точки шкалы (W, R).

Тогда существует точка $v \in W$, такая что

- $u_j R v \iff j \in A$;
- $v R u_j \iff j \in B$;
- $v R v \iff c$.

Утверждение

$F_n^r \in EXT_k$ а.п.н. для любого $k \in \mathbb{N}$.

Вероятность того, что для фиксированных различных $u_1, \ldots, u_k$ не существует такого $v \ldots$

Вероятность того, что для фиксированных различных $u_1, \ldots, u_k$ не существует такого $v \ldots$

$$P(E(u_1, \ldots, u_k)) \quad = P\left(\bigcap_{j=1}^{n}\{\text{ точка } x_j \text{ не подходит}\}\right)$$

Вероятность того, что для фиксированных различных $u_1, \ldots, u_k$ не существует такого $v \ldots$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(E(u_1, \ldots, u_k)) &= \mathrm{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} \{\text{ точка } x_j \text{ не подходит}\}\right) \\ &= (\mathrm{P}\{x_1 \text{ не подходит}\})^n \end{aligned}$$

Вероятность того, что для фиксированных различных $u_1, \ldots, u_k$ не существует такого $v\ldots$

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(E(u_1, \ldots, u_k)) &= \mathsf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n}\{\text{ точка } x_j \text{ не подходит}\}\right) \\ &= (\mathsf{P}\{x_1 \text{ не подходит}\})^n \\ &= \left(1 - 2^{-(2k+1)}\right)^n = q^n,\ q < 1. \end{aligned}$$

Вероятность того, что для фиксированных различных $u_1, \ldots, u_k$ не существует такого $v \ldots$

$$\begin{aligned} \mathsf{P}(E(u_1, \ldots, u_k)) &= \mathsf{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} \{\text{ точка } x_j \text{ не подходит}\}\right) \\ &= (\mathsf{P}\{x_1 \text{ не подходит}\})^n \\ &= \left(1 - 2^{-(2k+1)}\right)^n = q^n,\ q < 1. \end{aligned}$$

$\mathbb{E}\#\{(u_1, \ldots, u_k) \mid E(u_1, \ldots, u_k)\} =$

Вероятность того, что для фиксированных различных $u_1, \ldots, u_k$ не существует такого $v \ldots$

$$\begin{aligned} \mathrm{P}(E(u_1, \ldots, u_k)) &= \mathrm{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n}\{\text{ точка } x_j \text{ не подходит}\}\right) \\ &= (\mathrm{P}\{x_1 \text{ не подходит}\})^n \\ &= \left(1 - 2^{-(2k+1)}\right)^n = q^n,\ q < 1. \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}\#\{(u_1, \ldots, u_k) \mid E(u_1, \ldots, u_k)\} = C_n^k\, \mathrm{P}(E(u_1, \ldots, u_k)) =$$

Вероятность того, что для фиксированных различных $u_1, \ldots, u_k$ не существует такого $v \ldots$

$$
\begin{aligned}
\mathrm{P}(E(u_1, \ldots, u_k)) &= \mathrm{P}\left(\bigcap_{j=1}^{n} \{\text{ точка } x_j \text{ не подходит}\}\right) \\
&= (\mathrm{P}\{x_1 \text{ не подходит}\})^n \\
&= \left(1 - 2^{-(2k+1)}\right)^n = q^n,\ q < 1.
\end{aligned}
$$

$\mathbb{E}\#\{(u_1, \ldots, u_k) \mid E(u_1, \ldots, u_k)\} = C_n^k \, \mathrm{P}(E(u_1, \ldots, u_k)) =$
$= O(n^k q^n) \to 0.$

Тогда $\mathrm{P}\{\exists u_1, \ldots, u_k : \ E(u_1, \ldots, u_k)\} \to 0$, $n \to \infty$ (метод первого момента).

Следствия из EXT_k

- $R^2 = W \times W$ (при $k = 2$);

Следствия из EXT_k

- $R^2 = W \times W$ (при $k = 2$);
- $\bigcap_{j=1}^{k}(R(x_j) \cap R^{-1}(x_j)) \neq \varnothing$ для любых $x_1, \ldots, x_k \in W$.

Следствия из EXT_k

- $R^2 = W \times W$ (при $k = 2$);
- $\bigcap_{j=1}^{k}(R(x_j) \cap R^{-1}(x_j)) \neq \varnothing$ для любых $x_1, \ldots, x_k \in W$.

Аксиомы $\mathrm{K^{as}}$ ...

- $\mathrm{ML^r}_2 := \Box^2 p \to p$;
- $\mathrm{ML^r}_3 := \Box^2 p \to \Box^3 p$;
- $\mathrm{ML^r}_4 := p \to \Box^2 \Diamond^2 p$;
- $MODEXT_n := \bigwedge\limits_{i=1}^{n} \Diamond^2 (p_i \wedge \Box q_i) \to \Diamond^2 \bigwedge\limits_{i=1}^{n} (\Diamond p_i \wedge q_i)$.

- K^{as} — “логика почти всех конечных шкал Крипке”.

- K^{as} — “логика почти всех конечных шкал Крипке”.
- Обобщения на другие классы шкал?

- K^{as} — “логика почти всех конечных шкал Крипке”.
- Обобщения на другие классы шкал?
- Модально определимые классы?

- K^{as} — “логика почти всех конечных шкал Крипке”.
- Обобщения на другие классы шкал?
- Модально определимые классы?

Первый подход (универсальный)

Пусть $\mathcal{K}$ — класс шкал Крипке.
Рассмотрим случайную шкалу Крипке X_n с равномерным распределением на $\mathcal{K} \cap \mathcal{F}_n$.

Первый подход (универсальный)

Пусть $\mathcal{K}$ — класс шкал Крипке.
Рассмотрим случайную шкалу Крипке X_n с равномерным распределением на $\mathcal{K} \cap \mathcal{F}_n$.

$$\mathrm{P}\{X_n = F\} =$$

Первый подход (универсальный)

Пусть $\mathcal{K}$ — класс шкал Крипке.

Рассмотрим случайную шкалу Крипке X_n с равномерным распределением на $\mathcal{K} \cap \mathcal{F}_n$.

$$\mathsf{P}\{X_n = F\} = \frac{1}{|\mathcal{K} \cap \mathcal{F}_n|} =$$

Первый подход (универсальный)

Пусть $\mathcal{K}$ — класс шкал Крипке.
Рассмотрим случайную шкалу Крипке X_n с равномерным распределением на $\mathcal{K} \cap \mathcal{F}_n$.

$$\mathsf{P}\{X_n = F\} = \frac{1}{|\mathcal{K} \cap \mathcal{F}_n|} = \frac{1}{|\mathcal{F}_n|} \left(\frac{|\mathcal{K} \cap \mathcal{F}_n|}{|\mathcal{F}_n|} \right)^{-1} =$$

Первый подход (универсальный)

Пусть $\mathcal{K}$ — класс шкал Крипке.
Рассмотрим случайную шкалу Крипке X_n с равномерным распределением на $\mathcal{K} \cap \mathcal{F}_n$.

$$
\mathsf{P}\{X_n = F\} = \frac{1}{|\mathcal{K} \cap \mathcal{F}_n|} = \frac{1}{|\mathcal{F}_n|} \left(\frac{|\mathcal{K} \cap \mathcal{F}_n|}{|\mathcal{F}_n|} \right)^{-1} =
$$

$$
= \mathsf{P}(\{F_n^r = F\} \mid \{F_n^r \in \mathcal{K}\}).
$$

Условная вероятность: $\mathsf{P}(A \mid B) = \frac{\mathsf{P}(A \cap B)}{\mathsf{P}(B)}$.

Первый подход (универсальный)

Пусть $\mathcal{K}$ — класс шкал Крипке.
Рассмотрим случайную шкалу Крипке X_n с равномерным распределением на $\mathcal{K} \cap \mathcal{F}_n$.

$$\mathrm{P}\{X_n = F\} = \frac{1}{|\mathcal{K} \cap \mathcal{F}_n|} = \frac{1}{|\mathcal{F}_n|} \left(\frac{|\mathcal{K} \cap \mathcal{F}_n|}{|\mathcal{F}_n|} \right)^{-1} =$$

$$= \mathrm{P}(\{F_n^r = F\} \mid \{F_n^r \in \mathcal{K}\}).$$

Условная вероятность: $\mathrm{P}(A \mid B) = \frac{\mathrm{P}(A \cap B)}{\mathrm{P}(B)}$.

Для любой модальной логики L определим
$\mathrm{L}^{as} := \{\varphi \in \mathcal{ML} \mid \lim\limits_{n \to \infty} \mathrm{P}(\{F_n^r \models \varphi\} \mid \{F_n^r \models \mathrm{L}\}) = 1\}$.

Второй подход

- Мы много знаем про F_n^r (с равномерным распределением)

Второй подход

- Мы много знаем про F_n^r (с равномерным распределением)
- Идея: преобразовать F_n^r чтобы получить шкалу в заданном классе

Второй подход

- Мы много знаем про F_n^r (с равномерным распределением)
- Идея: преобразовать F_n^r чтобы получить шкалу в заданном классе

Хорновы модальные логики

- Хорновы предложения:

$$\forall x_1, \ldots, x_n \ (x_{i_1} R x_{j_1} \wedge \ldots \wedge x_{i_k} R x_{j_k} \to x_m R x_l)$$

- Класс шкал $\mathcal{F}$ хорнов, если $\mathcal{F}$ задаётся набором хорновых предложений.
- Модальная логика L хорнова, если Var(L) — хорнов класс.
- Примеры: K4, K5, S4, S5.

Определение

Пусть $F = (W, R)$ — шкала Крипке, $\mathcal{F}$ — класс шкал.
$\mathcal{F}$-замыканием шкалы F назовём шкалу $F' = (W, R')$, где R' — минимальное отношение, удовлетворяющее условиям

1. $R \subseteq R'$;
2. $(W, R') \in \mathcal{F}$.

Определение

Пусть $F = (W, R)$ — шкала Крипке, $\mathcal{F}$ — класс шкал.
$\mathcal{F}$-замыканием шкалы F назовём шкалу $F' = (W, R')$, где R' — минимальное отношение, удовлетворяющее условиям

1. $R \subseteq R'$;
2. $(W, R') \in \mathcal{F}$.

Утверждение

Если $\mathcal{F}$ — хорнова логика, то $\mathcal{F}$-замыкание любой шкалы F существует и единственно.

Обозначение: $\overline{F}^{\mathcal{F}}$; $\overline{F}^{\mathrm{L}} = \overline{F}^{\mathrm{Var(L)}}$.

Пусть L — хорнова модальная логика.

Пусть L — хорнова модальная логика.
Определим
$$\overline{\mathsf{L}}^{as} = \{\varphi \in \mathcal{ML} \mid \overline{Fr_n}^{\mathsf{L}} \models^{as} \varphi\}.$$

Пусть L — хорнова модальная логика.
Определим
$$\overline{\mathrm{L}}^{as} = \{\varphi \in \mathcal{ML} \mid \overline{Fr_n}^{\mathrm{L}} \models^{as} \varphi\}.$$

Основные свойства

- $\overline{\mathrm{L}}^{as}$ — нормальная модальная логика;

Пусть L — хорнова модальная логика.
Определим
$$\overline{\mathrm{L}}^{as} = \{\varphi \in \mathcal{ML} \mid \overline{Fr_n}^{\mathrm{L}} \models^{as} \varphi\}.$$

Основные свойства

- $\overline{\mathrm{L}}^{as}$ — нормальная модальная логика;
- $\mathrm{L} \subseteq \overline{\mathrm{L}}^{as}$;

Пусть L — хорнова модальная логика.
Определим
$$\overline{\mathrm{L}}^{as} = \{\varphi \in \mathcal{ML} \mid \overline{Fr_n^{\mathrm{L}}} \models^{as} \varphi\}.$$

Основные свойства

- $\overline{\mathrm{L}}^{as}$ — нормальная модальная логика;
- $\mathrm{L} \subseteq \overline{\mathrm{L}}^{as}$;
- $\mathrm{ML}^{\mathrm{r}} \subseteq \overline{\mathrm{L}}^{as}$.

Пусть L — хорнова модальная логика.
Определим

$$\overline{\mathrm{L}}^{as} = \{\varphi \in \mathcal{ML} \mid \overline{F_n^r}^{\mathrm{L}} \models^{as} \varphi\}.$$

Основные свойства

- $\overline{\mathrm{L}}^{as}$ — нормальная модальная логика;
- $\mathrm{L} \subseteq \overline{\mathrm{L}}^{as}$;
- $\mathrm{ML}^{\mathrm{r}} \subseteq \overline{\mathrm{L}}^{as}$.
  - Заметим, что общезначимость ML^{r} сохраняется при расширении R.

- $\mathsf{T}^{\mathsf{as}} \supseteq \mathsf{ML}^{\mathsf{r}} + AT$;
- $\mathsf{KB}^{\mathsf{as}} \supseteq \mathsf{ML}^{\mathsf{r}} + AB$;
- $\mathsf{TB}^{\mathsf{as}} \supseteq \mathsf{ML}^{\mathsf{r}} + AB + AT$.

- $\mathsf{T}^{\mathsf{as}} \supseteq \mathsf{ML}^{\mathsf{r}} + AT$;
- $\mathsf{KB}^{\mathsf{as}} \supseteq \mathsf{ML}^{\mathsf{r}} + AB$;
- $\mathsf{TB}^{\mathsf{as}} \supseteq \mathsf{ML}^{\mathsf{r}} + AB + AT$.

Заметим...

$$\mathsf{KB} + \{MODEXT_k\}_{k\in\mathbb{N}} = \mathsf{KB} + \left\{\left(\bigwedge_{j=1}^{k} \Diamond^2 p_j\right) \to \Diamond^2 \bigwedge_{j=1}^{k} p_j\right\}_{k\in\mathbb{N}}$$

Получим полную аксиоматизацию $\overline{\mathrm{K4}}^{\mathrm{as}}$.

Получим полную аксиоматизацию $\overline{\mathsf{K4}}^{\mathsf{as}}$.

1. $\overline{F}^{\mathsf{K4}}$ — транзитивное замыкание F;

Получим полную аксиоматизацию $\overline{\mathrm{K4}}^{\mathrm{as}}$.

1. $\overline{F}^{\mathrm{K4}}$ — транзитивное замыкание F;
2. В F_n^r а.п.н. $R^2 = W_n \times W_n$;

Получим полную аксиоматизацию $\overline{\mathrm{K4}}^{\mathrm{as}}$.

1. $\overline{F}^{\mathrm{K4}}$ — транзитивное замыкание F;
2. В F_n^r а.п.н. $R^2 = W_n \times W_n$;
3. $\overline{F_n^r}^{\mathrm{K4}} = (W_n,\, W_n \times W_n)$ а.п.н;

Получим полную аксиоматизацию $\overline{\mathrm{K4}}^{\mathrm{as}}$.

1. $\overline{F}^{\mathrm{K4}}$ — транзитивное замыкание F;
2. В F_n^r а.п.н. $R^2 = W_n \times W_n$;
3. $\overline{F_n^r}^{\mathrm{K4}} = (W_n, W_n \times W_n)$ а.п.н;
4. $\overline{F_n^r}^{\mathrm{K4}} \models^{\mathrm{as}} \mathrm{S5}$;

Получим полную аксиоматизацию $\overline{\mathrm{K4}}^{\mathrm{as}}$.

1. $\overline{F}^{\mathrm{K4}}$ — транзитивное замыкание F;
2. В F_n^r а.п.н. $R^2 = W_n \times W_n$;
3. $\overline{F_n^r}^{\mathrm{K4}} = (W_n, W_n \times W_n)$ а.п.н;
4. $\overline{F_n^r}^{\mathrm{K4}} \models^{\mathrm{as}} \mathrm{S5}$;
5. $\mathrm{S5} = \mathrm{Log}(\{W_n, W_n \times W_n\})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq^{\mathrm{as}} \mathrm{Log}(\overline{F_n^r}^{\mathrm{K4}}.)$

Получим полную аксиоматизацию $\overline{\mathrm{K4}}^{\mathrm{as}}$.

1. $\overline{F}^{\mathrm{K4}}$ — транзитивное замыкание F;
2. В F_n^r а.п.н. $R^2 = W_n \times W_n$;
3. $\overline{F_n^r}^{\mathrm{K4}} = (W_n,\ W_n \times W_n)$ а.п.н;
4. $\overline{F_n^r}^{\mathrm{K4}} \models^{\mathrm{as}} \mathrm{S5}$;
5. $\mathrm{S5} = \mathrm{Log}(\{W_n,\ W_n \times W_n\})_{n \in \mathbb{N}} \subseteq^{\mathrm{as}} \mathrm{Log}(\overline{F_n^r}^{\mathrm{K4}}.)$

Итого,

$$\overline{\mathrm{K4}}^{\mathrm{as}} = \mathrm{S5}.$$

Получим полную аксиоматизацию $\overline{\mathsf{K5}}^{\mathsf{as}}$.

Получим полную аксиоматизацию $\overline{\mathrm{K5}}^{\mathrm{as}}$.

1. $\overline{F}^{\mathrm{K5}}$ — евклидово замыкание F;

Получим полную аксиоматизацию $\overline{\mathrm{K5}}^{\mathrm{as}}$.

1. $\overline{F}^{\mathrm{K5}}$ — евклидово замыкание F;
2. В F_n^r а.п.н. $\forall x, y \in W\ \exists z: \ zRx, zRy$ (по EXT_2);

Получим полную аксиоматизацию $\overline{\mathrm{K5}}^{\mathrm{as}}$.

1. $\overline{F}^{\mathrm{K5}}$ — евклидово замыкание F;
2. В F_n^r а.п.н. $\forall x, y \in W \; \exists z : \; zRx, \; zRy$ (по EXT_2);
3. $\overline{F_n^r}^{\mathrm{K5}} = (W_n, \; W_n \times W_n)$ а.п.н;

Получим полную аксиоматизацию $\overline{\mathrm{K5}}^{\mathrm{as}}$.

1. $\overline{F}^{\mathrm{K5}}$ — евклидово замыкание F;
2. В F_n^r а.п.н. $\forall x, y \in W \ \exists z : \ zRx, zRy$ (по EXT_2);
3. $\overline{F_n^r}^{\mathrm{K5}} = (W_n, W_n \times W_n)$ а.п.н;

Аналогично предыдущему слайду,

$$\overline{\mathrm{K5}}^{\mathrm{as}} = \mathrm{S5}.$$

Получим полную аксиоматизацию $\overline{\mathrm{K5}}^{\mathrm{as}}$.

1. $\overline{F}^{\mathrm{K5}}$ — евклидово замыкание F;
2. В F_n^r а.п.н. $\forall x, y \in W\ \exists z:\ zRx, zRy$ (по EXT_2);
3. $\overline{F_n^r}^{\mathrm{K5}} = (W_n, W_n \times W_n)$ а.п.н;

Аналогично предыдущему слайду,

$$\overline{\mathrm{K5}}^{\mathrm{as}} = \mathrm{S5}.$$

То же справедливо для всех хорновых логик, содержащих K4 или K5!

Для любой хорновой модальной логики L :

1. $\overline{\mathrm{L}}^{\mathrm{as}}$ — нормальная модальная логика;
2. $\mathrm{L} \subseteq \overline{\mathrm{L}}^{\mathrm{as}}$;
3. $\mathrm{ML}^{\mathrm{r}} \subseteq \overline{\mathrm{L}}^{\mathrm{as}}$;
4. Если $A4 \in \mathrm{L}$, то $\overline{\mathrm{L}}^{\mathrm{as}} = \mathrm{S5}$;
5. Если $A5 \in \mathrm{L}$, то $\overline{\mathrm{L}}^{\mathrm{as}} = \mathrm{S5}$.

Спасибо за внимание!