$$\frac{\{\vee, \wedge, \to, \perp\} \cup Var}{\underbrace{(\neg A \rightleftarrows A \to \perp)}}$$

$\underline{\mathbb{P}}$ пропонент $\underline{\mathbb{O}}$ оппонент

$\underline{\mathcal{F}}$ = все подф-лы $\underline{\varphi_0}$ $(\underline{\mathbb{O}, \mathbb{P} \subseteq \mathcal{F}})$

позиция $\underline{C = (\mathbb{O}, \mathbb{P})}$; Начальная позиция $C_0 = (\underline{\varnothing}, \underline{\varphi_0})$

ход игрока: добавление ф-лы из $\mathcal{F}$ в $\underline{\mathbb{O}}$, $\underline{\mathbb{P}}$ $(\underline{\mathbb{O}}, \underline{\mathbb{P}})$

опр. $\Vdash$ в C:

$$\frac{}{C \nVdash \bot}$$

$$\frac{}{C \Vdash p} \rightleftharpoons p \in \mathbb{O}$$

$$\frac{}{C \Vdash \varphi * \psi} \rightleftharpoons \begin{cases} \varphi * \psi \in \mathbb{O} \cup \mathbb{P} \\ \underbrace{(C \Vdash \varphi) * (C \Vdash \psi)} \end{cases} \qquad (C \Vdash \varphi) \Rightarrow (C \Vdash \psi)$$

φ - ошибка $\mathbb{P}, \mathbb{O}$ в C $\rightleftharpoons$ $\varphi \in \mathbb{P}, \mathbb{O}$ и $C \nVdash \varphi$

у $\mathbb{O}$ нет ошибок
$\mathbb{P}$ есть $\Longleftrightarrow$ $\overline{\text{очередь } \mathbb{P}}$;

Кто не может сделать ход — проигр.

$\boxed{\vdash_I \varphi_0 \Longleftrightarrow \text{у } \mathbb{P} \text{ есть выигр. страт. из } C_0 = (\emptyset, \varphi_0)}$

игра для $\varphi_0 = (\neg q \to \neg p) \to (p \to q)$

P	O
φ_0	$\neg q \to \neg p$
$\neg q$	q

$\varphi_0 = \neg\neg\neg p \to \neg p$

P	O
φ_0	$\neg\neg\neg p$
$\neg p$	p
$\neg\neg p$	

$$\varphi_0 = p \to (\neg p \to q)$$

P	$\emptyset$
φ_0	p
$\neg p \to q$	$\neg p$

Критерий победы в позиции $C = (\mathbb{O}, \mathbb{P})$

$$\boxed{\mathbb{O} \vdash_{I} \mathbb{P} \iff \mathbb{P} \text{ выиг в } C}$$

$\left(\underline{\mathbb{O} \cup \mathbb{P}} \subseteq \mathcal{F} = \text{все подф-лы ф-лы } \underbrace{\widetilde{\varphi}_0 = \bigwedge \mathbb{O}_0 \to \varphi_0}_{} \right)$

φ_0

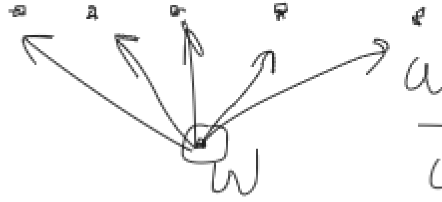
$$\underline{\mathbb{O}_0 \vdash_{I} \varphi_0}$$

$C = (\varnothing, \mathbb{P})$

$\varnothing \vdash_{I} \mathbb{P}$

$C' = (\varnothing, \mathbb{P}')$

$\varphi_i \notin \mathbb{P}'$



$\underline{w_i \Vdash \varnothing}$, $w_i \Vdash \mathbb{P}'$

$w_i \nVdash \varphi_i$

$\underline{w \Vdash p \iff p \in \varnothing}$

$\boxed{C' \Vdash \psi \iff w \Vdash \psi}$

$\psi \notin \varnothing \cup \mathbb{P}' \Rightarrow \exists i: w_i \nVdash \psi$

$\underline{w \Vdash \psi = A \wedge B} \iff \begin{matrix} w \Vdash A \\ w \Vdash B \end{matrix} \iff \underbrace{\begin{cases} C' \Vdash A \\ C' \Vdash B \end{cases}}$ $\Longrightarrow \psi \in \varnothing \cup \mathbb{P}'$; $\Longleftarrow C' \Vdash \psi$

$C' \Vdash \psi = A \to B \Rightarrow C' \Vdash A \Rightarrow C' \Vdash B$

$\Updownarrow$

$\underbrace{w \Vdash A \Rightarrow w \Vdash B}$

$\Downarrow$

$w \Vdash \psi$

$\psi \in \varnothing \cup \mathbb{P}'$

$C = (\varnothing, \mathbb{P})$

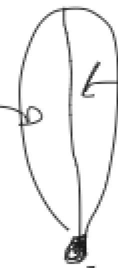
$w \Vdash \psi$

$C = (\mathcal{O}, \mathbb{P}) \longrightarrow C' = (\mathcal{O}', \mathbb{P})$

$\underbrace{\mathcal{O} \not\vdash_I \mathbb{P}}$

$\boxed{\mathcal{O}' \not\vdash_I \mathbb{P}}$

$\forall \varphi \in \mathcal{L} \setminus \mathcal{O}' \quad \mathcal{O}' \cup \{\varphi\} \vdash_I \mathbb{P}$



$w_j \Vdash \mathcal{O}', \; w_j \Vdash \mathbb{P}$

$w_i \Vdash \varphi$

$\Updownarrow$

$w \Vdash \varphi$

$w \Vdash \mathcal{O}'$

$w \not\Vdash \psi \quad \psi \in \mathbb{P}$

$\boxed{w \Vdash \varphi \Leftrightarrow C' \Vdash \varphi}$

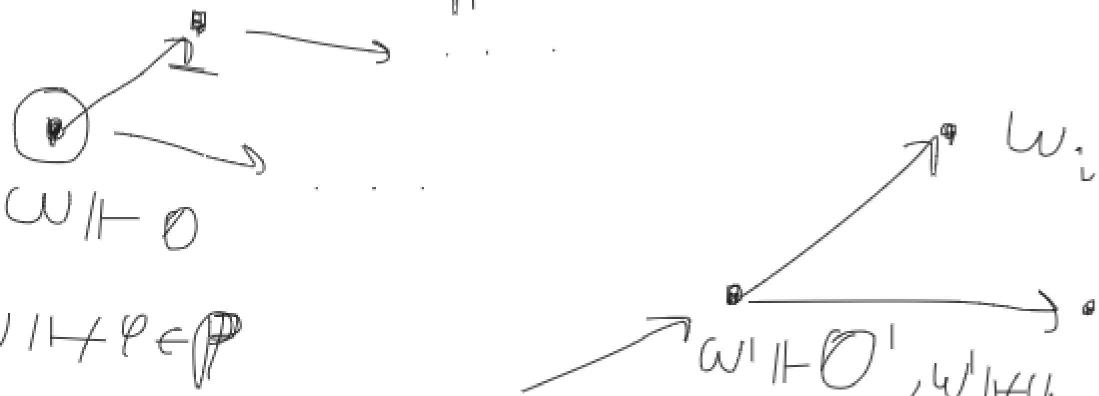
$\varphi \notin \mathcal{O}' \cup \mathbb{P} \Rightarrow \varphi \notin \mathcal{O}' \Rightarrow w \not\Vdash \varphi$

$w \Vdash \varphi = A \star B \Rightarrow \underbrace{(w \Vdash A) \star (w \Vdash B)}$

$\Downarrow$

$\underbrace{(C' \Vdash A) \star (C' \Vdash B)} \Rightarrow C' \Vdash \varphi$

$$C = (\mathbb{O}, \mathbb{P}), \quad \mathbb{O} \not\vdash_I \mathbb{P}$$



$w' \nVdash \varphi' \in \mathbb{P}$

$w \Vdash \mathbb{O}$

$w \nVdash \varphi \in \mathbb{P}$

$w_i \Vdash \mathbb{P}$

$w_j \Vdash \mathbb{P}$

$\underline{w' \Vdash \mathbb{O}'}, \; w' \nVdash \varphi \in \mathbb{P}$

$C' = (\mathbb{O}', \mathbb{P})$

$C' \Vdash \varphi \Leftrightarrow w \Vdash \varphi$

$$\mathbb{O} \vdash_I \varphi_0 \qquad \tilde{\varphi}_0 = \bigwedge \mathbb{O}' \to \varphi_0$$

$\cup|$

конеч $\mathbb{O}'$

$$C = (\emptyset, \mathbb{P})$$

$$\begin{tikzcd}
 & & C_0 \arrow[dll] \arrow[dl] \arrow[d] \arrow[dr] & \\
C_4 & C_3 & C_2 & C_1
\end{tikzcd}$$

$C_i \sqsubseteq C_j \rightleftharpoons$ из C_j игра может попасть в C_i

$\forall C = (\mathbb{O}, \mathbb{P}) \quad \exists M : \quad M \models \mathbb{O}$

$M \not\models \varphi \in \mathbb{P}$

$$C \longrightarrow C'$$

$C = (\mathbb{O}, \mathbb{P})$, $\quad C' = (\mathbb{O} \cup \{\varphi\}, \mathbb{P})$

$M \qquad M \models \mathbb{O} \cup \{\varphi\},\ M \not\models \psi \in \mathbb{P}$

$$\begin{array}{l} C \longrightarrow (\mathbb{O}, \mathbb{P} \cup \{\varphi_i\}) \\ C \longrightarrow (\mathbb{O}, \mathbb{P} \cup \{\varphi_i\}) \end{array}$$

$C = (\mathbb{O}, \mathbb{P})$

$M_i, \omega_i \Vdash \boxed{\mathbb{O}, \mathbb{P}}$

$\omega_i \not\Vdash \varphi_i$

$M' \models \mathbb{O}$

$M \not\models \psi \in \mathbb{P}$

$\omega \qquad \omega_i$

$\omega \Vdash p \Leftrightarrow p \in \mathbb{O}$

$$\boxed{\omega \Vdash \varphi \Longleftrightarrow C \Vdash \varphi}$$