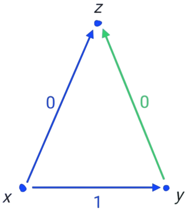
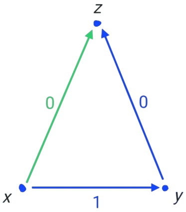
Проблема унификации в бимодальной логике доказуемости **GLB**

Лукашов Никита
lnv619@gmail.com

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

14 апреля 2023 г.





Логика GLB

Язык

- переменные $p_1, p_2, \ldots, p_n$;
- константы $\top$ и $\bot$;
- булевы связки $\wedge, \vee, \neg, \to$;
- модальности $[0]$ и $[1]$.

Интерпретация:

- $[0]\varphi =$ «$PA \vdash \varphi$»
- $[1]\varphi =$ «φ ω-доказуема в PA» (доказуема с применением нескольких истинных Π_1 предложений)

Аксиомы и правила вывода

Аксиомы:

1. все булевы тавтологии;
2. $[i](\varphi \to \psi) \to ([i]\varphi \to ([i]\psi))$, $i = 0{,}1$;
3. $[i]([i]\varphi \to \varphi) \to [i]\varphi$, $i = 0, 1$;
4. $[m]\varphi \to [n][m]\varphi$, для $m \leqslant n$;
5. $\langle 0\rangle\varphi \to [1]\langle 0\rangle\varphi$;
6. $[0]\varphi \to [1]\varphi$.

Правила вывода:

- modus ponens;
- $\varphi \vdash [i]\varphi$, $i = 0, 1$.

Исследования GLB

Г. К. Джапаридзе, 1986 г.

- **GLB** не полна относительно никакого класса шкал Крипке.
- Если $\langle W, R_0, R_1 \rangle$ — шкала Крипке для **GLB**, то с неизбежностью $R_0 = R_1 = \varnothing$.
- арифметическая полнота **GLB**

Установленные факты про **GLB**, К. Игнатьев

- свойство интерполяции Крейга;
- теорема о неподвижной точке;
- теорема о нормальной форме.

Постановка задачи

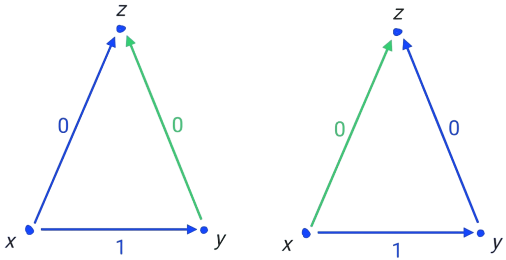
— Исследовать тип унификации **GLB** (σ *унификатор* для φ в L, если $\vdash_L \sigma(\varphi)$).
— Описание допустимых правил в **GLB** (φ_1/φ_2 *допустимо*, если $\vdash_L \sigma(\varphi_1) \Rightarrow \vdash_L \sigma(\varphi_2)$)

- **I** — подсистема **GLB**, полученная изоляцией аксиом (1)-(5)

Определение

Шкала Крипке $\langle W, R_0, R_1 \rangle$ называется шкалой Игнатьева если

- R_i обратно фундированное, иррефлексивное, транзитивное отношение на W, для $i = 0, 1$;
- $\forall x, y\ (xR_1y \Rightarrow \forall z\ (xR_0z \Leftrightarrow yR_0z))$.

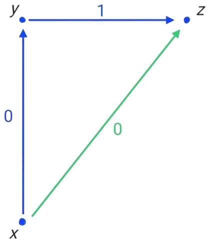


Теорема, К. Игнатьев

Логика **I** корректна и полна относительно шкал Игнатьева.

Подсистемы GLB
Логика J

- **J** — подсистема **GLB**, получающаяся из **I** добавлением аксиомы
  - $[m]\varphi \to [m][n]\varphi$ для $m \leqslant n$
- $\mathrm{GLB} \vdash [m]\varphi \to [m][n]\varphi$.



Определение

J-шкала — шкала Игнатьева, такая что:

- $\forall x, y\ (xR_m y \,\&\, yR_n x \Rightarrow xR_m z)$, если $m \leqslant n$.

Теорема, Л. Д. Беклемишев

Логика **J** корректна и полна относительно (конечных) **J**-шкал.

Подсистемы GLB

m-листы

- E_m — симметричное, транзитивное, рефлексивное замыкание R_m.

Определение

Классы эквивалентности E_m называются *m-листами* или *m-слоями.*

Свойства m-листов

- любой 0-лист разбивается на 1-листы;
- все точки 1-листа R_0 не сравнимы между собой.
- существует отношение упорядочивания R_0 на 1-листах, определяемое как

$$\alpha R_0 \beta, \quad \text{если } \exists x \in \alpha\ \exists y \in \beta\ xR_0 y.$$

Более того, так как $xR_1 y \Rightarrow \forall z\ (xR_0 z \Leftrightarrow yR_0 z)$, то

$$\alpha R_0 \beta \Longleftrightarrow \exists y \in \beta\ \forall x \in \alpha\ xR_0 y.$$

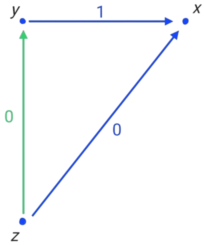
Подсистемы GLB

Стратифицируемость

Определение

Шкала логики **J** называется стратифицированной, если

$$\forall x, y, z\ (zR_0x \,\&\, yR_1x \Rightarrow zR_0y) \qquad \text{(S)}$$



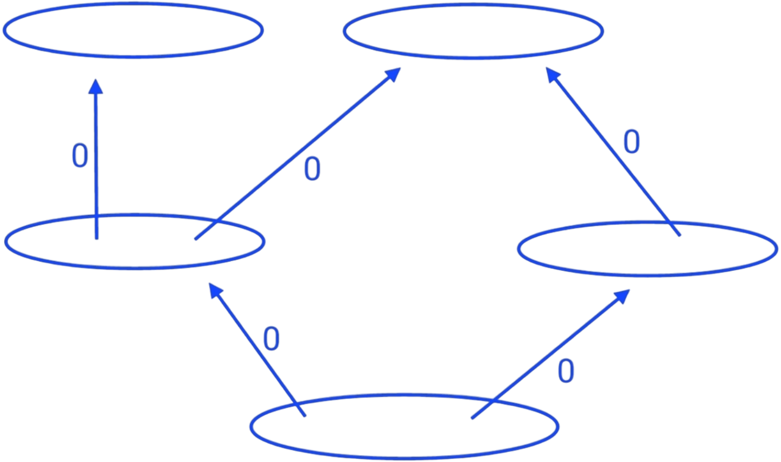
- если α и β 1-листы, то
  $\alpha R_0 \beta \Rightarrow$ каждая точка листа β R_0-достижима из любой точки листа α.
- R_0-упорядочивание в стратифицируемых шкалах полностью задаётся их R_0-упорядочиванием 1-листов.

Теорема, Л. Д. Беклемишев

Логика **J** корректна и полна относительно (конечных) стратифицируемых шкал.

Подсистемы GLB

Стратифицируемость



Бисимуляция

Определение

n-бисимуляция между двумя моделями определяется индукцией:

- $\mathcal{W}_x \sim_0 \mathcal{W}'_{x'}$, если в x и x' истинны одни и те же пропозициональные переменные ($x \Vdash p \Leftrightarrow x' \Vdash p$).
- $\mathcal{W}_x \sim_{n+1} \mathcal{W}'_{x'}$, если
  1. $\mathcal{W}_x \sim_0 \mathcal{W}'_{x'}$;
  2. $\forall y \in \mathcal{W}_x \ (xR_iy \Rightarrow \exists y' \ (x'R_iy' \,\&\, \mathcal{W}_y \sim_n \mathcal{W}'_{y'}))$ для любого $i = 0, 1$;
  3. $\forall y' \in \mathcal{W}'_{x'} \ (x'R_iy' \Rightarrow \exists y \ (xR_iy \,\&\, \mathcal{W}'_{y'} \sim_n \mathcal{W}_y))$ для любого $i = 0, 1$.

- $\sim_n$ — отношение эквивалентности
- $\#\{[\mathcal{W}_x]_n\} < \infty$

- $d(p_i) = 0, d(\bot) = 0$, $d(\varphi \circ \psi) = max\{d(\varphi), d(\psi)\}$ для булевых связок $\circ$, $d([i]\varphi) = 1 + d(\varphi)$

Предложение, K. Fine

$\mathcal{W}_x \sim_n \mathcal{W}'{}_{x'}$ тогда и только тогда, когда для любой формулы φ, такой что $d(\varphi) \leqslant n$, выполнено $(\mathcal{W}_x, x \Vdash \varphi \Leftrightarrow \mathcal{W}'{}_{x'}, x' \Vdash \varphi)$.

Подстановки

- $\overrightarrow{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_n) \Rightarrow \varphi(\overrightarrow{p})$
- $Form(\overrightarrow{p})$

Определения

Подстановкой σ называется функция $\sigma : \overrightarrow{p} \to Form(\overrightarrow{p})$.

- $\sigma(\varphi(\overrightarrow{p})) \leftrightharpoons \varphi(p_1/\sigma(p_1), \ldots, p_n/\sigma(p_n)) \Rightarrow \sigma : Form(\overrightarrow{p}) \to Form(\overrightarrow{p})$
- $(\tau\sigma)(p) = \tau(\sigma(p))$ для всех $p \in \overrightarrow{p}$
- $\sigma_1 \leqslant \sigma_2$, если $\exists\tau$, такая что $\vdash_L \tau(\sigma_2(p)) \leftrightarrow \sigma_1(p)$ для всех $p \in \overrightarrow{p}$
- σ — унификатор для $\varphi(\overrightarrow{p})$, если $\vdash_L \sigma(\varphi)$
- $S = \{\sigma \mid \sigma$ — унификатор для $\varphi\}$ полное, если любой унификатор для $\varphi \leqslant$ для какого-нибудь унификатора из S
- Полное множество унификаторов S для φ называется базисом, если любые два элемента из S не сравнимы относительно $\leqslant$.
- унификатор σ для φ самый общий, если $\{\sigma\}$ — полное множество унификаторов.

Подстановки

Подстановка,применённая к модели

$\mathcal{W} = \langle W, R_0, R_1, v \rangle$ и σ можно сопоставить $\sigma(\mathcal{W}) = \langle W, R_0, R_1, \sigma(v) \rangle$, положив

$$\sigma(\mathcal{W}), x \Vdash p_i \overset{def}{\iff} \mathcal{W}, x \Vdash \sigma(p_i)$$

для каждого мира x и каждой переменной p_i.

Свойства $\sigma(\mathcal{W})$

Пусть $\varphi \in Form(\vec{p})$ и $\sigma : Form(\vec{p}) \to Form(\vec{p})$ — подстановка. Тогда:

1. Для любой модели Крипке $\mathcal{W}$ выполнено $(\sigma(\mathcal{W}) \vDash \varphi \iff \mathcal{W} \vDash \sigma(\varphi))$;
2. $\vdash_L \sigma(\varphi)$ тогда и только, когда $\sigma(\mathcal{W}) \vDash \varphi$ для всех шкал логики L всех моделей Крипке $\mathcal{W}$;
3. Для любой подстановки τ и любой модели Крипке $\mathcal{W}$ выполнено $\tau(\sigma(\mathcal{W})) = (\tau\sigma)(\mathcal{W})$.

Проективность

Определение

φ проективна в логике L, если для неё существует унификатор $\sigma : Form(\vec{p}) \to Form(\vec{p})$, такой что для любого $p \in \vec{p}$

$$\varphi \vdash_L \sigma(p) \leftrightarrow p. \qquad \text{(P)}$$

- σ — самый общий унификатор для φ
  - τ: $\tau(\varphi) \vdash_L \tau(\sigma(p)) \leftrightarrow \tau(p)$
  - $\vdash_L \tau(\sigma(p)) \leftrightarrow \tau(p)$
  - $\tau \leqslant \sigma$
- (P) $\Leftrightarrow$ $\varphi \vdash_L \sigma(\psi) \leftrightarrow \psi$ для формулы $\psi \in Form(\vec{p})$

Предложение

Множество подстановок, удовлетворяющих свойству (P), замкнуто относительно композиции, независимо от того, унифицируют ли они φ или нет.

Результаты для **GL**

Теорема 1, С. Гильярди, 2000 г.

Формула φ является проективной в GL тогда и только тогда, когда $MOD_{GL}(\varphi)$ обладает *свойством расширения*.

Определения

Вариантом модели Крипке $\mathcal{W} = \langle W, R\, r, v\rangle$ называется такая модель Крипке $\mathcal{W}' = \langle W, R, r, v'\rangle$, что $v(x) = v'(x)$ для всех миров x, кроме корня.
Класс K моделей Крипке обладает свойством расширения, если для любой $\mathcal{W} = \langle W, R, r, v\rangle$, такой что $\mathcal{W}_x \in K$ для всех $x \neq r$, найдётся её вариант $\mathcal{W}'$, такой что $\mathcal{W}' \in K$.

Теорема 2, С. Гильярди, 2000 г.

Любая унифицируемая формула φ в GL имеет конечный базис унификаторов.

Идея доказательства Гильярди

Теорема 1, С. Гильярди, 2000 г.

Формула φ является проективной в GL тогда и только тогда, когда $MOD_{GL}(\varphi)$ обладает *свойством расширения*.

- $a \subseteq \overrightarrow{p}$
- θ^a_φ обладает свойством (P)
- $\theta^a_\varphi(x) = \begin{cases} \varphi \to x, & \text{если } x \in a, \\ \varphi \wedge x, & \text{если } x \notin a. \end{cases}$

Предложение

Пусть $\varphi \in Form(\overrightarrow{p}), a \subseteq \overrightarrow{p}, (\mathcal{W}, r) \in MOD_{GL}$. Тогда

1. $\mathcal{W} \vDash \varphi \Rightarrow \theta^a_\varphi(\mathcal{W}) = \mathcal{W}$,
2. $v(r) = a$ в модели $\theta^a_\varphi(\mathcal{W})$, иначе.

- $\theta := \prod\limits_a \theta^a_\varphi \Rightarrow \theta^N$ — проективный унификатор для φ, где $N = \#\{[\mathcal{W}_x]_n\}$

Эквивалентность унификации в GLB и J

- $M(\varphi) := \bigwedge\limits_{[0]\psi \in Sub(\varphi)} ([0]\psi \to [1]\psi)$
- $M^+(\varphi) := M(\varphi) \wedge [0]M(\varphi) \wedge [1]M(\varphi)$

Теорема, Л. Д. Беклемишев

Следующие утверждения эквивалентны:

1. $\mathrm{GLB} \vdash \varphi$;
2. $\mathrm{J} \vdash M^+(\varphi) \to \varphi$.

Предложение

Подстановка σ является унификатором формулы φ логике **GLB** тогда и только тогда, когда σ является унификатором формулы $M^+(\varphi) \to \varphi$ в логике **J**.

Проективность и свойство расширения в **J**

Определения

Вариантом модели Крипке $\mathcal{W} = \langle W, \{R_i\}_{i=0}^1, r, v\rangle$ называется такая модель Крипке $\mathcal{W}' = \langle W, \{R_i\}_{i=0}^1, r, v'\rangle$, что $v(x) = v'(x)$ для всех миров x, кроме корня.
Класс K обладает свойством расширения, если для любой $\mathcal{W} = \langle W, \{R_i\}_{i=0}^1, r, v\rangle$, такой что $\mathcal{W}_x \in K$ для всех $x \neq r$, найдётся её вариант $\mathcal{W}'$, такой что $\mathcal{W}' \in K$.

Теорема

Формула φ проективна в **J** тогда и только тогда, когда класс её моделей $MOD_S(\varphi)$ обладает свойством расширения.

Доказательство

($\Rightarrow$) Пусть $\mathcal{W}$, такая что $\mathcal{W}_x \in MOD_S(\varphi)$ для всех $x \neq r$. Тогда $\sigma(\mathcal{W}) \in MOD_S(\varphi)$, где σ — соответствующий унификатор. Утверждается, что $\sigma(\mathcal{W})$ — искомый вариант $\mathcal{W}$. Действительно,

$$\sigma(\mathcal{W}), x \Vdash p \overset{def}{\iff} \mathcal{W}, x \Vdash \sigma(p) \overset{(P)}{\iff} \mathcal{W}, x \Vdash p,$$

Проективность и свойство расширения в $\mathbf{J}$

Теорема

Формула φ проективна в $\mathbf{J}$ тогда и только тогда, когда класс её моделей $MOD_S(\varphi)$ обладает свойством расширения.

Доказательство

($\Leftarrow$) Пусть $MOD_S(\varphi)$ обладает свойством расширения. Нам необходимо построить для формулы φ соответствующий проективный унификатор.
Положим $n = d(\varphi)$.

Определение

Две модели $\mathcal{W}$ и $\mathcal{W}'$ назовём *1-подобными* (обозначение $\mathcal{W} \approx_1 \mathcal{W}'$), если модели (без корня), полученные из них удалением 1-листа, корня совпадают.

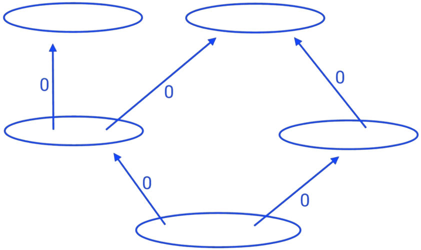
Лемма 1

Для любой модели $\mathcal{W}$ логики **J** с корнем r, у которой $\forall x \in \mathcal{W}$ $(rR_0x \Rightarrow \mathcal{W}, x \Vdash \varphi)$, найдётся подстановка $\theta_{\mathcal{W}}$, удовлетворяющая свойству (P) для формулы φ, такая что:

1. $\theta_{\mathcal{W}}(\mathcal{W}) \vDash \varphi$;
2. для любой другой модели $\mathcal{W}'$ и $x \in \mathcal{W}'$ выполнено: $\mathcal{W}'_x \vDash \varphi \Rightarrow \theta_{\mathcal{W}}(\mathcal{W}'_x) = \mathcal{W}'_x$;
3. если для некоторой модели $\mathcal{W}'$, найдётся модель $\mathcal{W}''$, такая что $\mathcal{W}' \approx_1 \mathcal{W}''$ и $\mathcal{W} \sim_{n+1} \mathcal{W}''$, то также $\theta_{\mathcal{W}}(\mathcal{W}') \vDash \varphi$.

Доказательство

1. Пусть нам дана модель $\mathcal{W}$, в которой формула φ истинна во всех мирах, кроме некторых из 1-листа корня (обозначим этот лист $\mathcal{A}$).



Заметим, что оценка формул вида $[0]\psi$ во всех мирах $\mathcal{A}$ одинакова. Тогда заменим все максимальные подформулы вида $[0]\psi$ в формуле φ на их оценку ($\top$ или $\bot$) в листе $\mathcal{A}$ и получим формулу φ'.

В φ' осталась только одна модальность $[1]$, поэтому 1-лист $\mathcal{A}$ является моделью логики GL по отношению R_1. Тогда класс $MOD_{GL}(\varphi')$ обладает свойством расширения.

По теореме Гильярди для логики GL, у φ' существует проективный унификатор σ.
Значит, $\forall x \in \mathcal{A}\ (\sigma(\mathcal{A}), x \Vdash \varphi')$.
Рассмотрим подстановку $\theta_{\mathcal{W}}$, определяемую как:

$$\theta_{\mathcal{W}}(p_i) = (\varphi \wedge p_i) \vee (\neg\varphi \wedge \sigma(p_i)).$$

Свойство (P) для $\theta_{\mathcal{W}}$ выполнено по построению.
Для произвольной $\mathcal{W}'$, по определению, $\theta_{\mathcal{W}}(\mathcal{W}'), x \Vdash p_i \iff \mathcal{W}', x \Vdash \theta_{\mathcal{W}}(p_i)$, поэтому если $\mathcal{W}', x \Vdash \varphi$, то

$$\mathcal{W}', x \Vdash \theta_{\mathcal{W}}(p_i) \iff \mathcal{W}', x \Vdash p_i.$$

Таким образом, $\theta_{\mathcal{W}}(\mathcal{W}') = \mathcal{W}'$, и утверждение 2 леммы доказано.
Для любого мира $x \in \mathcal{W}$ не из 1-листа корня, имеем $\theta_{\mathcal{W}}(\mathcal{W}), x \Vdash \varphi$.
Для $x \in \mathcal{A}$:

$$\sigma(\mathcal{A}), x \Vdash \varphi' \Longrightarrow \theta_{\mathcal{W}}(\mathcal{W}), x \Vdash \varphi' \iff \theta_{\mathcal{W}}(\mathcal{W}), x \Vdash \varphi.$$

Проективность и свойство расширения в J

- Из каждого класса эквивалентности $\sim_{n+1}$ выберем по представителю $\mathcal{W}$, т. ч. $\forall x \in \mathcal{W}\ (rR_0x \Rightarrow \mathcal{W}, x \Vdash \varphi)$
- $\overline{\theta} := \prod \theta_{\mathcal{W}}$ по всем $\theta_{\mathcal{W}}$ из леммы 1
  - произведение конечно
  - $\overline{\theta}$ удовлетворяет свойству (P)

Лемма 2

Если для модели $\mathcal{W}$ формула φ истинна всюду, кроме 1-слоя корня, то $\overline{\theta}(\mathcal{W}) \vDash \varphi$.

Доказательство

Разложим $\overline{\theta} = \theta_1 \theta_{\mathcal{W}'} \theta_2$, где $\mathcal{W}' \sim_{n+1} \mathcal{W}$. Тогда

$$\left.\begin{array}{r} \theta_2(\mathcal{W}) \approx_1 \mathcal{W} \\ \mathcal{W}' \sim_{n+1} \mathcal{W} \end{array}\right\} \Rightarrow \theta_{\mathcal{W}'}(\theta_2(\mathcal{W})) \vDash \varphi.$$

Сомножитель θ_1 дальше эту истинность сохранит.

Проективность и свойство расширения в J

Наша последняя цель — предъявить подстановку θ, т. ч. $\theta(\mathcal{W}) \vDash \varphi$ для любой модели $\mathcal{W}$, и тем самым завершить доказательство теоремы.

Обозначения

Зафиксируем модель $\mathcal{W}$ и рассмотрим $x \in \mathcal{W}$.

- $\mathcal{W}[\varphi] = \{x \in \mathcal{W} \mid \mathcal{W}_x \vDash \varphi\}$
- *Ранг* $rk(x) = \#\{[\mathcal{W}_y]_{n+1} \mid xR_0y \,\&\, y \in \mathcal{W}[\varphi]\}$

- $rk(x) \leqslant rk(\overline{\theta}(x))$ для любой мира $x \in \mathcal{W}$
- $\mathcal{W}, x \nVdash \varphi \Rightarrow \exists y \ (\mathcal{W}, y \nVdash \varphi \,\&\, \forall z \in \mathcal{W}_y \ (yR_0z \Rightarrow \mathcal{W}_y, z \Vdash \varphi))$
  - по лемме 2, $\overline{\theta}(\mathcal{W}_y) \vDash \varphi$
  - $(\overline{\theta})^{|\mathcal{W}|}(\mathcal{W}) \vDash \varphi$
- Хотим показать, что достаточно применить $\overline{\theta}$ всего N раз, где N — количество классов эквивалентности по отношению $\sim_{n+1}$.
- $\theta := (\overline{\theta})^N$ — искомый проективный унификатор для формулы φ

Определение

Минимальный ранг модели $\mu(\mathcal{W}) = \min_{x \notin \mathcal{W}[\varphi]} rk(x)$.

- $\mathcal{W} \not\models \varphi \Rightarrow \mu(\mathcal{W}) < \mu(\overline{\theta}(\mathcal{W}))$
- Предположим $\mathcal{W} \not\models \varphi$ и $\mu(\mathcal{W}) = \mu(\overline{\theta}(\mathcal{W}))$
  - Для $x \in \mathcal{W}$, на которых достигался минимум, $rk(x) = rk(\overline{\theta}(x))$.
  - Покажем, что $\overline{\theta}(\mathcal{W}_x) \models \varphi$
  - $\mathcal{W}, x \nVdash \varphi \Rightarrow \exists y\ (\mathcal{W}, y \nVdash \varphi \,\&\, \forall z \in \mathcal{W}_y\ (yR_0 z \Rightarrow \mathcal{W}_y, z \Vdash \varphi))$
  - По лемме 2, $\overline{\theta}(\mathcal{W}_y) \models \varphi \Rightarrow \overline{\theta} = \theta_1 \theta_{\mathcal{W}'} \theta_2$, где $\mathcal{W}' \sim_{n+1} \mathcal{W}_y$
  - Обозначим $\tilde{\mathcal{W}} = \theta_2(\mathcal{W}_x)$ и $\theta' = \theta_{\mathcal{W}'}$
  - По прежнему, по лемме 1, в любом мире $\tilde{\mathcal{W}}_y$, R_0-достижимом из y, истинна формула φ и $rk(x) = rk(\theta'(x))$

Лемма 3

$\theta'(\tilde{\mathcal{W}}_z)$ является моделью формулы φ для любого мира $z \in \tilde{\mathcal{W}}$.

Проективность и свойство расширения в J

Лемма 3

$\theta'(\tilde{\mathcal{W}}_z)$ является моделью формулы φ для любого мира $z \in \tilde{\mathcal{W}}$.

Доказательство.

Заметим, что выполнены следующие включения:

$$\{[\tilde{\mathcal{W}}_v]_{n+1} \mid zR_0 v \,\&\, v \in \tilde{\mathcal{W}}_z[\varphi]\} \subseteq \{[\tilde{\mathcal{W}}_v]_{n+1} \mid xR_0 v \,\&\, v \in \tilde{\mathcal{W}}_x[\varphi]\} \subseteq \{[\theta'(\tilde{\mathcal{W}}_v)]_{n+1} \mid xR_0 v \,\&\, v \in \theta'(\tilde{\mathcal{W}}_x)[\varphi]\}$$

Из минимальности ранга: $rk(y) = rk(z) = rk(x) = rk(\theta'(x))$, по предположению. Значит, все три множества выше совпадают.

Докажем утверждение леммы индукцией по $h_0(z)$ при, где $h_i(z)$ — длина наибольшей цепи $x_1 R_i x_2 R_i \ldots R_i x_m$, где $x_1 = z$ и $x_k \notin \tilde{\mathcal{W}}[\varphi]$ при $k = 1, \ldots, m$.

База: $h_0(z) = 0$. Тогда формула φ истинна во всех мирах модели $\tilde{\mathcal{W}}_z$, а значит подстановка θ' эту истинность сохранит.

С помощью включения выше также можно показать переход.

□

Финитный тип логик J и GLB

Теорема

Любая унифицируемая формула φ в **J** имеет конечный базис унификаторов.

Идея доказательства.

Можно показать, что для любого унификатора σ для φ найдётся некоторая проективная формула ψ, такая что

- $d(\psi) \leqslant d(\varphi)$;
- σ также является унификатором для ψ;
- $\psi \vdash_{\mathbf{J}} \varphi$

Тогда σ будет $\leqslant$ самого общего унификатора ψ (т. к. $\psi \vdash_J \tau(p) \leftrightarrow p$), который в свою очередь также является унификатором для φ.
Конечность базиса будет следовать из существования конечного (до доказуемой эквивалентности) множества формул глубины $d(\varphi)$.

$\square$

Теорема

Любая унифицируемая формула φ в **GLB** имеет конечный базис унификаторов.

- $S(\varphi) := \{\psi \mid d(\psi) \leqslant d(\varphi) \,\&\, \psi \vdash_{GLB} \varphi\}$.

Определение

Проективная аппроксимация $\Pi(\varphi)$ формулы φ называется минимальное подмножество $S(\varphi)$, т. ч. для любой формулы $\psi \in S(\varphi)$ найдётся формула $\gamma \in \Pi(\varphi)$, т. ч. $\psi \vdash_{GLB} \gamma$.

- каждый унификатор для φ является унификатором для некоторой формулы из $S(\varphi)$, а значит и для некоторой формулы из $\Pi(\varphi)$
- любой унифиактор для формулы φ является менее общим самого общего унификатора для некоторой формулы из $\Pi(\varphi)$

Описание допустимых правил в логике **GLB**

Предложение

Самые общие унификаторы для формул из $\Pi(\varphi)$ образуют базис унификаторов для формулы φ в **GLB**.

Правило φ_1/φ_2 в логике L называется допустимым, если для каждой подстановки σ, такой что $\vdash_L \sigma(\varphi_1)$, также $\vdash_L \sigma(\varphi_2)$.

Теорема

Правило φ_1/φ_2 является допустимым в логике **GLB** тогда и только тогда, когда для всех формул $\psi \in \Pi(\varphi_1)$ выполнено $\psi \vdash_{GLB} \varphi_2$.

Заключение

Полученные результаты:

1. получили описание проективных формул в логике **J**;
2. доказали финитный тип унификации в логике **GLB**;
3. получили описание допустимых правил в логике **GLB** в терминах проективной аппроксимации.

Куда двигаться дальше?

- общение полученных результатов на логику **GLP**
- следуя Йерабику, дать явное описание допустимых правил в терминах AR-систем

Beklemishev, L. D. (2010).
Kripke semantics for provability logic glp.
Annals of Pure and Applied Logic, 161(6):756–774.

Ghilardi, S. (2000).
Best solving modal equations.
Annals of Pure and Applied Logic, 102(3):183–198.