Трюк Крипке и разрешимость монадических фрагментов модальных и суперинтуиционистских предикатных логик

Рыбаков М. Н., Шкатов Д. П.
ИППИ РАН, НИУ ВШЭ, ТвГУ;
University of the Witwatersrand, Johannesburg
m_rybakov@mail.ru
shkatov@gmail.com

Ключевые слова: *трюк Крипке, неклассические логики, предикатные логики, проблема выполнимости, проблема общезначимости, алгоритмическая неразрешимость.*

Аннотация: Трюк Крипке позволяет моделировать бинарную предикатную букву в классических формулах модальными формулами с двумя унарными предикатными буквами. Рассматриваются вариации трюка Крипке и возможности его применения в модальных и суперинтуиционистских предикатных логиках. Кроме того, обсуждаются ситуации, когда применить трюк Крипке невозможно.

Сол Крипке заметил [6], что в классических формулах первого порядка бинарная буква моделируется с помощью двух унарных: достаточно заменить формулы вида $P(x, y)$ формулами вида $\Diamond(Q_1(x) \wedge Q_2(y))$. Такое моделирование позволяет погрузить классическую логику бинарного предиката в монадический фрагмент любой модальной логики, расширяющей классическую логику предикатов и содержащуюся в **QS5**. Поскольку классическая логика бинарного предиката неразрешима, получаем неразрешимость монадических фрагментов большого класса модальных логик. Учитывая неразрешимость теории симметричного иррфелексивного предиката [19, 4], использование формулы $\neg\Diamond(Q(x) \wedge Q(y))$ вместо $\Diamond(Q_1(x) \wedge Q_2(y))$ даёт неразрешимость модальных логик одного унарного предиката, содержащихся в **QS5**, причём лишь при трёх предметных переменных в языке.

Анализ трюка Крипке показывает, что возможность его применения предполагает выполнение некоторых условий, в частности:

- (TK_1) использование формул, где под модальностью может быть более одной свободной переменной;
- (TK_2) отсутствие в логике формул, ограничивающих число миров, достижимых из произвольного мира.

Нарушение условия (TK_1) приводит к т.н. мон<u>о</u>дическим фрагментам (когда в области действия модальности могут находится формулы с не более чем одной свободной переменной), которые часто оказываются разрешимыми [20].

Как заметили авторы, нарушение условия (TK_2) приводит к разрешимости мон<u>а</u>дических фрагментов (когда в формулах допускаются предикатные буквы валентности не более чем один) [2] и даже с равенством [15].

Отметим, что в семантике Крипке для модальных и суперинтуиционистских логик равенство при этом можно понимать по-разному, и, в отличие от классической логики предикатов, эти понимания приводят к разным множествам истинных формул. Так, в шкалах Крипке (с предметными областями) равенство может определяться [5] как

(Eq_1) наследственная вверх конгруэнтноть,
(Eq_2) наследственная вверх и вниз конгруэнтность,
(Eq_3) предикат совпадения.

Принципы (Eq_1), (Eq_2) и (Eq_3) дают семантики, различимые как модальными, так и интуиционистскими формулами: существует шкала Крипке, для которой эти принципы приводят к трём разным множествам истинных в ней интуиционистских (а следовательно, и модальных) формул [5]. Принцип (Eq_1) выражается модальной формулой $(x = y) \to \Box(x = y)$, а принцип (Eq_2) — формулой $(x = y) \leftrightarrow \Box(x = y)$. В интуиционистской семантике принцип (Eq_1) выполняется автоматически, а принцип (Eq_2) описывается формулой $(x = y) \vee \neg(x = y)$ и соответствует понятию разрешимого равенства. Принцип (Eq_3) не является определимым ни в одном из этих языков. Тем не менее, для многих естественных классов шкал Крипке принципы (Eq_2) и (Eq_3) не различимы ни модально, ни интуиционистски [5]. Приведённые ниже утверждения справедливы для каждого из этих трёх пониманий равенства.

Предложение 1. *Монадический фрагмент с равенством модальной логики шкалы Крипке с конечным множеством миров алгоритмически разрешим.*

Следствие 1. *Монадические фрагменты с равенством модальных и суперинтуиционистских логик рекурсивно перечислимых классов шкал с конечным числом миров принадлежат классу Π^0_1, т.е. имеют рекурсивно перечислимое дополнение.*

Учитывая [9, 12], получаем ещё одно следствие. Если L — модальная или суперинтуиционистская логика, то $L^{=}_{wfin}$ обозначает, соответственно, модальную или суперинтуиционистскую логику с равенством, определяемую классом шкал логики L, содержащих конечное множество миров; при этом семантически равенство определяется в соответсвии с любым из принципов (Eq_1), (Eq_2) или (Eq_3).

Следствие 2. *Пусть L — одна из модальных логик* **QK**, **QT**, **QK4**, **QK5**, **QK45**, **QKD**, **QKD4**, **QKD45**, **QKB**, **QKTB**, **QS4**, **QS5**, **QGL**, **QGrz** *или одна из супеинтуиционистских логик* **QInt**, **QKP**, **QKC**. *Тогда монадический фрагмент логики $L^{=}_{wfin}$ — как с равенством, так и без равенства — является Π^0_1-полным.*

Учитывая полноту по Крипке логик вида $\mathbf{QAlt}^{=}_n$ [17], получаем следующее следствие.

Следствие 3. *Для любого $n \in \mathbb{N}$ монадический фрагмент с равенством модальной логики $\mathbf{QAlt}_n^=$ является алгоритмически разрешимым.*

Замечание 1. Приведённые следствия останутся справедливым, если рассматривать семантику постоянных областей.

Тем не менее, некоторые ослабления приведённых условий всё-таки позволяют применить трюк Крипке (или какую-то его модификацию). Например, в шкалах Крипке с конечным числом миров действует второе из указанных ограничений; но если при этом для каждого $n \in \mathbb{N}$ допускается наличие шкалы с миром, видящим не менее n миров, то логика унарного предиката для такого класса шкал не будет не только разрешимой, но и рекурсивно перечислимой [18, 9, 12].

В интуиционистской логике применение трюка Крипке затруднительно, что связано с наличием отрицания. Тем не менее, в очень многих случаях отрицание можно промоделировать импликацией к новой пропозициональной букве, а в получившихся позитивных формулах использовать следующую модификацию трюка Крипке: формулы вида $P(x, y)$ заменить формулами вида $(Q_1(x) \wedge Q_2(y) \to p) \vee q$ [8, 12, 16]. Отметим, что такое моделирование позволяет остаться в рамках позитивного фрагмента; тем не менее, здесь пропозициональную букву p можно заменить формулой $\bot$, т.е. моделировать формулу $P(x, y)$ формулой $\neg(Q_1(x) \wedge Q_2(y)) \vee q$.

Приведём некоторые результаты, полученные авторами для модальных и суперинтуиционистских логик с использованием различных модификации трюка Крипке:

— многие модальные и суперинтуиционистские логики унарного предиката неразрешимы в языке с двумя предметными переменными [8];
— многие модальные и суперинтуиционистские логики одного унарного предиката естественных классов конечных шкал Крипке не являются рекурсивно перечислимыми при трёх предметных переменных [9, 12];
— модальные логики различных классов линейных шкал (сильно) неразрешимы в языке с одной унарной буквой, одной пропозициональной буквой и двумя предметными переменными [10, 11, 13];
— модальные логики нётеровых порядков сильно неразрешимы в языке с двумя унарными буквами, одной пропозициональной буквой и двумя предметными переменными [1, 7].
— полимодальные темпоральные логики унарного предиката сильно неразрешимы [3] в языке с двумя предметными переменными [14].

Кроме того, авторами готовится работа [16], где предполагается описать особенности, связанные с использованием трюка Крипке и его модификаций в различных неклассических логиках.

Работа выполнена в ИППИ РАН при поддержке Российского научного фонда, грант 21–18–00195.

Литература

[1] М.Н. Рыбаков. Об алгоритмической выразительности модального языка с одной лишь одноместной предикатной буквой. *Логические исследования*, 9:179–201, 2002.

[2] М.Н. Рыбаков. Неразрешимость модальных логик одноместного предиката. *Логические исследования*, 23(2):60–75, 2017.

[3] М.Н. Рыбаков, Е.А. Котикова. Алгоритмическая выразительность предикатной логики ветвящегося времени в языке с одной одноместной буквой. *Десятые Смирновские чтения по логике*, Москва, 15–17 июня 2017 года, 43–44, 2017.

[4] М.Н. Рыбаков. Алгоритмическая сложность теорий бинарного предиката в языках с малым числом переменных. *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления*, 507(6):61–65, 2022.

[5] D. Gabbay, V. Shehtman, D. Skvortsov. *Quantification in Nonclassical Logic, Volume 1*, volume 153 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics*. Elsevier, 2009.

[6] S.A. Kripke. The undecidability of monadic modal quantification theory. *Zeitschrift für Matematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 8:113–116, 1962.

[7] Mikhail Rybakov. Predicate counterparts of modal logics of provability: High undecidability and Kripke incompleteness. To appear in *Logic Journal of the IGPL*.

[8] M. Rybakov, D. Shkatov. Undecidability of first-order modal and intuitionistic logics with two variables and one monadic predicate letter. *Studia Logica*, 107(4):695–717, 2019.

[9] M. Rybakov, D. Shkatov. Algorithmic properties of first-order modal logics of finite Kripke frames in restricted languages. *Journal of Logic and Computation*, 30(7):1305–1329, 2020.

[10] M. Rybakov, D. Shkatov. Algorithmic properties of first-order modal logics of the natural number line in restricted languages. In Nicola Olivetti, Rineke Verbrugge, Sara Negri, and Gabriel Sandu, editors, *Advances in Modal Logic*, volume 13. College Publications, 2020.

[11] M. Rybakov, D. Shkatov. Algorithmic properties of first-order modal logics of linear Kripke frames in restricted languages. *Journal of Logic and Computation*, 31(5):853–870, 2021.

[12] M. Rybakov, D. Shkatov. Algorithmic properties of first-order superintuitionistic logics of finite Kripke frames in restricted languages. *Journal of Logic and Computation*, 31(2):494–522, 2021.

[13] M. Rybakov, D. Shkatov. Algorithmic properties of QK4.3 and QS4.3. *Двенадцатые Смирновские чтения. Материалы Международной научной конференции*, Москва, 24–26 июня 2021 года, 50–54, 2021.

[14] M. Rybakov, D. Shkatov. Undecidability of QLTL and QCTL with two variables and one monadic predicate letter. *Логические исследования*, 27(2):93–120, 2021.