Рекурсивная неотделимость для классических теорий бинарного предиката и модальных логик унарного предиката

М. Н. Рыбаков

ИППИ РАН, НИУ ВШЭ, ТвГУ

Аннотация

Доказано, что множество общезначимых классических формул первого порядка в сигнатуре с одной бинарной предикатной буквой рекурсивно неотделимо от множества формул той же сигнатуры, опровержимых в классе конечных симметричных иррефлексивных моделей, причём достаточно трёх переменных в языке. Близкие результаты получены для фрагментов модальных предикатных логик в языке с одной унарной предикатной буквой и двумя-тремя предметными переменными.

1 Введение

Теорема Трахтенброта [6, 7] утверждает, что *множество тождественно истинных формул логики предикатов и множества формул, опровергающихся в её конечных моделях, рекурсивно неотделимы*. Это наблюдение автоматически переносится на модальные предикатные логики, определяемые классами шкал Крипке: логика **QK** и множество модальных предикатных формул, опровергающихся в некотором классе шкал с конечными предметными областями, рекурсивно неотделимы. Аналогичное утверждение справедливо для **QK** и логики класса конечных шкал Крипке, в котором нет ограничения на ветвление в мире.

Ситуация меняется, если мы будем рассматривать монадические фрагменты модальных предикатных логик: монадические фрагменты классической логики предикатов **QCl** и логики конечных моделей $\mathbf{QCl}_{\mathit{fin}}$ совпадают и разрешимы [8], в то время как монадические фрагменты многих неклассических предикатных логик неразрешимы [1–3, 9, 11–17]. Вопрос о рекурсивной отделимости монадических фрагментов модальных логик был недавно поставлен В. Б. Шехтманом (в частности, в контексте обсуждения доклада [5]). Мы приведём ответ на этот вопрос. Для этого нам потребуется предварительно установить некоторые факты о классических теориях бинарного предиката, связанные с рекурсивной неоделимостью некоторых множеств формул.

2 Необходимые понятия и обозначения

Мы предполагаем, что читатель знаком с классическим и модальным предикатными языками, а также с семантикой Крипке для модального предикатного языка [10], и лишь кратко опишем систему понятий и обозначений, которые будем использовать.

Пусть $\mathbf{QCl}$ — множество общезначимых классических формул первого порядка. Теорией в языке первого порядка будем называть множество классических формул первого порядка, содержащее $\mathbf{QCl}$ и замкнутое по modus ponens и правилу обобщения. Для классической теории T определим теорию T_{fin} как множество формул, истинных в классе конечных моделей теории T.

Пусть $\mathbf{QCl}^{bin}$ — фрагмент $\mathbf{QCl}$ в языке с одной бинарной предикатной буквой, $\mathbf{SIB}$ — теория симметричного иррефлексивного бинарного отношения в языке с одной бинарной предикатной буквой, $\mathbf{SRB}$ — теория симметричного рефлексивного бинарного отношения в том же языке.

Для модальной предикатной логики L определим логику L_{dfin} как множество модальных предикатных формул, истинных в шкалах логики L, предметные области миров в которых конечны, а также логику L_{wfin} как множество модальных предикатных формул, истинных в конечных шкалах Крипке логики L (т.е. с конечным множеством миров).

Непересекающиеся множества слов X и Y называются *рекурсивно отделимыми*, если существует такое рекурсивное множество Z, что $X \subseteq Z$ и $Y \cap Z = \varnothing$. Пусть L_1 и L_2 — логики в некотором языке $\mathcal{L}$, причём $L_1 \subseteq L_2$. Говорим, что логики L_1 и L_2 *рекурсивно различимы*, если рекурсивно отделимы множества формул L_1 и $\mathcal{L} \setminus L_2$; в противном случае говорим, что L_1 и L_2 *рекурсивно неразличимы*.

3 Теории бинарного предиката

Основным наблюдением, сделанным для теорий бинарного предиката является следующее утверждение.

Теорема 1. *Фрагменты теорий $\mathbf{QCl}^{bin}$ и $\mathbf{SIB}_{\mathit{fin}}$ в языке с бинарной предикатной буквой и тремя предметными переменными рекурсивно неразличимы.*

Это наблюдение имеет следствия; приведём лишь одно из них, являющееся обобщением сделанного наблюдения.

Теорема 2. *Пусть T и T' — теории бинарного предиката, для которых выполнены следующие условия:*

- $\mathbf{QCl}^{bin} \subseteq T \subseteq T'$;
- $T' \subseteq \mathbf{SIB}_{\mathit{fin}}$ *или* $T' \subseteq \mathbf{SRB}_{\mathit{fin}}$.

Тогда позитивные фрагменты теорий T и T'_{fin} в языке с бинарной предикатной буквой и тремя предметными переменными рекурсивно неразличимы.

Отметим, что близкие вопросы затрагиваются в [4], где, в частности, получена неразрешимость теорий $\mathbf{SIB}$ и $\mathbf{SRB}$ в языке с бинарной предикатной буквой и тремя предметными переменными, но не получена неразрешимость теорий $\mathbf{SIB}_{\mathit{fin}}$ и $\mathbf{SRB}_{\mathit{fin}}$ в том же языке. Сейчас неразрешимость $\mathbf{SIB}_{fin}$ и $\mathbf{SRB}_{fin}$ в языке с бинарной предикатной буквой и тремя предметными переменными следует из приведённых теорем.

4 Монадические фрагменты модальных логик

Симметричный рефлексивный бинарный предикат моделируется в модальном языке с помощью унарного предиката. Именно, если бинарная предикатная буква P соответствует в классических моделях такому предикату, то формулу $P(x, y)$ можно промоделировать формулой $\Diamond(Q(x) \wedge Q(y))$, где Q — унарная предикатная буква. Достаточным условием при этом является то, что в классе шкал Крипке интересущей нас модальной предикатной логики имеется шкала, некоторый мир которой видит бесконечно много миров; в случае конечных моделей симметричного рефлексивного бинарного предиката достаточно иметь шкалы, где миры могут видеть сколь угодно большое конечное множество миров.

Теорема 3. *Пусть L — одна из модальных предикатных логик* $\mathbf{QGL.3.bf}$, $\mathbf{QGrz.3.bf}$, $\mathbf{S4.bd_2.bf}$, $\mathbf{S5}$. *Тогда фрагменты с одной унарной предикатной буквой и тремя предметными переменными логик* $\mathbf{QK}$ *и* L_{dfin}, *а также фрагменты с одной унарной предикатной буквой и тремя предметными переменными логик* $\mathbf{QK}$ *и* L_{wfin} *рекурсивно неразличимы.*

Эта теорема полностью покрывает результаты, изложенные в [16], добавляя новые. При некоторых дополнительных ограничениях теорема может быть усилена. Именно, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть L — одна из модальных предикатных логик* $\mathbf{QGL.bf}$, $\mathbf{QGrz.bf}$, $\mathbf{QKTB}$. *Тогда фрагменты с одной унарной предикатной буквой и двумя предметными переменными логик* $\mathbf{QK}$ *и* L_{dfin}, *а также фрагменты с одной унарной предикатной буквой и двумя предметными переменными логик* $\mathbf{QK}$ *и* L_{wfin} *рекурсивно неразличимы.*

Эта теорема покрывает также результаты, относящиеся к модальным предикатным логикам, изложенные в [15], усиливая их. Обе теоремы имеют следствия; мы приведём лишь одно из них, касающееся предикатных вариантов стандартных модальных пропозициональных логик.

Теорема 5. *Пусть L — одна из модальных предикатных логик* $\mathbf{QK}$, $\mathbf{QT}$, $\mathbf{QK4}$, $\mathbf{QS4}$, $\mathbf{QGL}$, $\mathbf{QGrz}$, $\mathbf{QKTB}$. *Тогда фрагменты с одной унарной предикатной буквой и двумя предметными переменными логик L и L_{dfin}, а также фрагменты с одной унарной предикатной буквой и двумя предметными переменными логик L и L_{wfin} рекурсивно неразличимы.*

В отношении логики $\mathbf{QS5}$ сделаем отдельные замечания.

Теорема 6. *Фрагменты с одной унарной предикатной буквой и тремя предметными переменными логик* $\mathbf{QS5}$ *и* $\mathbf{QS5}_{dfin}$, *а также фрагменты с одной унарной предикатной буквой и тремя предметными переменными логик* $\mathbf{QS5}$ *и* $\mathbf{QS5}_{wfin}$ *рекурсивно неразличимы.*

Теорема 7. *Фрагменты с тремя унарными предикатными буквами и двумя предметными переменными логик* $\mathbf{QS5}$ *и* $\mathbf{QS5}_{\mathit{dfin}}$*, а также фрагменты с тремя унарными предикатными буквами и двумя предметными переменными логик* $\mathbf{QS5}$ *и* $\mathbf{QS5}_{\mathit{wfin}}$ *рекурсивно неразличимы.*

5 Предмет для обсуждения

Предполагается обсудить идеи, лежащие в основе получения этих и близких результатов, возможности обобщения, а также возникающие вопросы и гипотезы.

Список литературы

[1] С. Ю. Маслов, Г. Е. Минц, В. П. Оревков. Неразрешимость в конструктивном исчислении предикатов некоторых классов формул, содержащих только одноместные предикатные переменные. *Доклады АН СССР.* 1965. Т. 163. № 2. С. 295–297.

[2] М. Н. Рыбаков. Об алгоритмической выразительности модального языка с одной лишь одноместной предикатной буквой. *Логические исследования.* Т. 9. С. 179–201. 2002.

[3] М. Н. Рыбаков. Неразрешимость модальных логик одноместного предиката. *Логические исследования.* Т. 23. № 2. С. 60–75. 2017.

[4] М. Н. Рыбаков. Алгоритмическая сложность теорий бинарного предиката в языках с малым числом переменных. *Доклады Российской академии наук. Математика, информатика, процессы управления.* Т. 507. № 6. С. 61–65. 2022.

[5] М. Н. Рыбаков, Д. П. Шкатов. Трюк Крипке и разрешимость монадических фрагментов модальных и суперинтуиционистских предикатных логик. *Тринадцатые Смирновские чтения по логике.* Материалы международной научной конференции (22–24 июня 2023г., Москва). 2023. С. 40–44.

[6] Б. А. Трахтенброт. Невозможность алгорифма для проблемы разрешимости на конечных классах. *Доклады АН СССР.* 1950. Т. 70. № 4. С. 569–572.

[7] Б. А. Трахтенброт. О рекурсивной отделимости. *Доклады АН СССР.* 1953. Т. 88. № 6. С. 953–956.

[8] G. S. Boolos, J. P. Burgesss, R. C. Jeffrey. *Computability and Logic.* Cambridge University Press, fifth edition, 2007.

[9] D. Gabbay, V. Shehtman. Undecidability of modal and intermediate first-order logics with two individual variables. *The Journal of Symbolic Logic*, 58(3):800–823, 1993.

[10] D. Gabbay, V. Shehtman, D. Skvortsov. *Quantification in Nonclassical Logic, Volume 1*, volume 153 of *Studies in Logic and the Foundations of Mathematics.* Elsevier, 2009.

[11] G. E. Hughes, M. J. Cresswell. *A New Introduction to Modal Logic.* Routledge, 1996.

[12] R. Kontchakov, A. Kurucz, M. Zakharyaschev. Undecidability of first-order intuitionistic and modal logics with two variables. *Bulletin of Symbolic Logic*, 11(3):428–438, 2005.

[13] S. A. Kripke. The undecidability of monadic modal quantification theory. *Zeitschrift für Matematische Logik und Grundlagen der Mathematik*, 8:113–116, 1962.

[14] M. Rybakov. Predicate counterparts of modal logics of provability: High undecidability and Kripke incompleteness. *Logic Journal of the IGPL*, to appear (DOI: 10.1093/jigpal/jzad002).

[15] M. Rybakov, D. Shkatov. Undecidability of first-order modal and intuitionistic logics with two variables and one monadic predicate letter. *Studia Logica*, 107(4):695–717, 2019.

[16] M. Rybakov, D. Shkatov. Algorithmic properties of first-order modal logics of finite Kripke frames in restricted languages. *Journal of Logic and Computation*, 30(7):1305–1329, 2020.

[17] M. Rybakov, D. Shkatov. Algorithmic properties of first-order superintuitionistic logics of finite Kripke frames in restricted languages. *Journal of Logic and Computation*, 31(2):494–522, 2021.