Допустимые правила в модальных логиках $K4, S4$ и GL

Лукашов Никита
lnv619@gmail.com

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

1 марта 2024 год

$$\Phi \mid\!\sim_{GL} \Psi$$

Аксиоматика

Язык модальной логики

- переменные $p_1, p_2, \ldots$;
- константы $\top$ и $\bot$;
- булевы связки $\wedge, \vee, \to, \neg$;
- модальность $\Box$

- $\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi$ и $\boxdot\varphi := \varphi \wedge \Box\varphi$;
- $\varphi, \psi, \theta, \ldots$ — формулы;
- $\Gamma, \Delta, \ldots$ — множества формул.

Аксиоматика

Минимальная модальная логика K

Схемы аксиом:

1. все пропозициональные тавтологии;
2. $\Box\varphi \to (\Box(\varphi \to \psi) \to \Box\psi)$.

Правила вывода:

- $\varphi, \varphi \to \psi / \psi$ (*modus ponens*);
- $\varphi / \Box\varphi$ (*Nec*).

- $K4 = K + \Box\varphi \to \Box\Box\varphi$;
- $S4 = K4 + \Box\varphi \to \varphi$;
- $GL = K4 + \Box(\Box\varphi \to \varphi) \to \Box\varphi$.

Выводимость из гипотез

Определение

$\Gamma \vdash_L \varphi \Leftrightarrow \exists \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, т. ч. $\varphi_n = \varphi$ и каждая формула φ_i является либо аксиомой, либо формулой из Γ, либо получена из двух ей предшествующих по правилу *modus ponens* или *Nec*.

Теорема о дедукции

Если нормальная модальная логика L содержит $K4$, то

$$\Gamma, \varphi \vdash_L \psi \;\Leftrightarrow\; \Gamma \vdash_L \boxdot\varphi \to \psi.$$

Выводимость из гипотез

Разрешимость $\vdash$ для K

Пусть $\varphi \vdash_K \psi$. Тогда

$$\vdash_K \Box^0\varphi \wedge \Box^1\varphi \wedge \ldots \wedge \Box^m\varphi \to \psi \text{ для } m = 2^{|Sub(\varphi) \cup Sub(\psi)|}.$$

- $\Box\bot/\bot$ — допустимо, но не выводимо в K.

Открытый вопрос

Разрешима ли проблема допустимости в K?

Семантика Крипке

Определение

Пара $\mathcal{F} = \langle W, R \rangle$, где $W \neq \varnothing$ и R — произвольное бинарное отношение на W, называется шкалой Крипке.
Тройка $\mathcal{W} = \langle W, R, \Vdash \rangle$ называется моделью Крипке, если $\langle W, R \rangle$ — шкала Крипке и $\Vdash$ удовлетворяет следующим условиям:

- истинность $\neg\varphi$, $\varphi \wedge \psi$, $\varphi \vee \psi$, $\varphi \to \psi$ определяется локально;
- $w \Vdash \Box\varphi \Leftrightarrow \forall v\,(wRv \to v \Vdash \varphi)$.

- $\mathcal{W} \vDash \varphi \Leftrightarrow \forall x \in \mathcal{W}\,(\mathcal{W}, x \Vdash \varphi)$.
- $\mathcal{W}_x = \{v \mid xRv\} \cup \{x\}$ — порождённая подмодель; мир x называется корнем модели $\mathcal{W}_x$.

Корректность и полнота

Теорема

- K корректна и полна относительно всех конечных шкал Крипке с корнем;
- $K4$ корректна и полна относительно всех конечных $K4$-шкал Крипке с корнем;
- $S4$ корректна и полна относительно всех конечных $S4$-шкал Крипке с корнем;
- GL корректна и полна относительно всех конечных GL-шкал Крипке с корнем.

Корректность и полнота

Сильное дизъюнктивное свойство

Пусть $L = K, K4, S4, GL$. Тогда:

$$L \vdash \Box\varphi \vee \Box\psi \;\Rightarrow\; (L \vdash \varphi \text{ или } L \vdash \psi).$$

Подстановки

Определение

Подстановкой σ называется функция $\sigma : \mathrm{Var} \to Form(L)$.

- $\sigma(\varphi(\bar{p})) := \varphi(p_1/\sigma(p_1), \ldots, p_n/\sigma(p_n))$
  - $\sigma : Form(L) \to Form(L)$;
- $(\tau\sigma)(p) = \tau(\sigma(p))$ для всех $p \in \mathrm{Var}$;
- σ — унификатор для $\varphi(\bar{p})$ в $L \Leftrightarrow \vdash_L \sigma(\varphi)$.

Теорема о подстановке

Для любой подстановки σ:

$$\Gamma \vdash_L \varphi \Rightarrow \sigma(\Gamma) \vdash_L \sigma(\varphi).$$

Выводимые и допустимые правила вывода

Определение

- Правило вывода Γ/φ называется выводимым в логике L, если $\Gamma \vdash_L \varphi$.
- Правило вывода Γ/φ называется допустимым в логике L (обозначение $\Gamma \mathrel{|\!\!\sim}_L \varphi$), если любой унификатор формул из множества Γ также является унификатором формулы φ.

Предложение ($\vdash_L \subseteq \mathrel{|\!\!\sim}_L$)

Любое выводимое правило является допустимым.

Выводимые и допустимые правила вывода

Примеры

$$K \qquad K4 \qquad S4 \qquad GL$$

- $\dfrac{\Box p}{p}$

Выводимые и допустимые правила вывода

Примеры

$$K \qquad K4 \qquad S4 \qquad GL$$

- $\dfrac{\Box p \to p}{p}$

Выводимые и допустимые правила вывода

Примеры

$$K \qquad K4 \qquad S4 \qquad GL$$

- $\dfrac{\Diamond p \wedge \Diamond \neg p}{\bot}$

Проблема допустимости

Наблюдения

- $L \subseteq L' \Rightarrow \vdash_L \subseteq \vdash_{L'}$.
- $L \subseteq L' \not\Rightarrow \mathrel{|\!\!\sim}_L \subseteq \mathrel{|\!\!\sim}_{L'}$.

Разрешимость допустимости правил

В.В. Рыбаков:

1984 г. Разрешимость проблемы допустимости в $S4$.

1990 г. Разрешимость проблемы допустимости в GL.

Базис допустимых правил вывода

Определение (через выводимость)

Множество допустимых правил $\mathcal{R}$ называется базисом, если любое допустимое правило $\Gamma \mathrel{|\!\!\sim}_L \psi$ логики L выводимо в системе, аксиомы которой $\Gamma \rhd \varphi$ для всех $\Gamma \vdash_L \varphi$ и $\Gamma/\varphi \in \mathcal{R}$, и правила вывода:

$$(\mathit{Sub})\ \frac{\Gamma \rhd \varphi}{\sigma(\Gamma) \rhd \sigma(\varphi)} \qquad (\mathit{Weak})\ \frac{\Gamma \rhd \varphi}{\Gamma', \Gamma \rhd \varphi}$$

$$(\mathit{Comp})\ \frac{\Gamma \rhd \varphi \quad \Gamma', \varphi \rhd \psi}{\Gamma', \Gamma \rhd \psi}$$

Существование базиса

Э. Ержабек, 2005 г.

$$\frac{\Box\left(\Box q \to \bigvee_{i=1}^{n} \Box p_i\right) \vee \Box r}{\bigvee_{i=1}^{n} \boxdot(\boxdot q \to p_i) \vee r}\,(\widehat{A}^{\bullet})$$

образуют базис допустимых правил в логике GL.

Наблюдение

Если логика L обладает сильным дизъюнктивным свойством, то

$$\varphi \mathrel{|\!\sim_L} \theta, \psi \mathrel{|\!\sim_L} \theta \Rightarrow \Box\varphi \vee \Box\psi \mathrel{|\!\sim_L} \theta.$$

Обобщённые допустимые правила

Определение

$\varphi_1, \ldots, \varphi_k \mathrel{|\!\!\sim}_L \psi_1, \ldots, \psi_l \Leftrightarrow$ любой унификатор формул $\varphi_1, \ldots, \varphi_k$ является унификатором для *некоторой* формулы ψ_i.

- дизъюнктивное свойство:

$$\bigvee_{i<n} \Box\varphi_i \mathrel{|\!\!\sim}_L \{\varphi_i \mid i < n\}$$

- $\Gamma \rhd \Delta$ — секвенции (Γ, Δ — конечные множества формул).

AR-система

Определение

AR-системой над L называется называется множество A секвенций $\Gamma \rhd \Delta$, содержащее $\Gamma \rhd \varphi$ для всех $\Gamma \vdash_L \varphi$ и замкнутое относительно правил:

$$(Sub)\ \frac{\Gamma \rhd \Delta}{\sigma(\Gamma) \rhd \sigma(\Delta)} \qquad (Weak)\ \frac{\Gamma \rhd \Delta}{\Gamma', \Gamma \rhd \Delta, \Delta'}$$

$$(Cut)\ \frac{\Gamma \rhd \varphi, \Delta \quad \Gamma', \varphi \rhd \Delta'}{\Gamma', \Gamma \rhd \Delta, \Delta'}$$

Утверждение

Обобщённые допустимые правила логики L образуют AR-систему.

Базис AR-системы

Определения

- Множество секвенций X называется базисом A, если A — наименьшая AR-система, содержащая X.
- В модели $\langle W, R, \Vdash \rangle$ истинна секвенция $\Gamma \rhd \Delta$, если $\mathcal{W} \vDash \varphi$ для некоторой $\varphi \in \Delta$ или $\mathcal{W} \nvDash \varphi$ для некоторой $\varphi \in \Gamma$.
- Секвенция $\Gamma \rhd \Delta$ общезначима в шкале $\langle W, R \rangle$, если $\Gamma \rhd \Delta$ истинна в любой модели $\langle W, R, \Vdash \rangle$.

Расширяемые шкалы

Определения

Пусть $\langle W, R \rangle$ — шкала Крипке. Мир v — непосредственный предшественник миров $\{v_1, \ldots, v_n\} \subset \mathcal{W}$, если

$$(vRv_1, \ldots, vRv_n) \ \& \ \forall v' \ (vRv' \Rightarrow v_i Rv' \text{для некоторого } i).$$

Шкала Крипке $\langle W, R \rangle$ называется расширяемой, если:

- $\mathcal{W}_x$ конечно для любого $x \in \mathcal{W}$;
- каждое конечное множество миров имеет непосредственного предшественника.

Базис обобщённых допустимых правил

Аксиоматика

$$\Box\varphi \to \bigvee_{i<n} \Box\psi_i \rhd \{\boxdot\varphi \to \psi_i \mid i < n\} \tag{$A^\bullet$}$$

$$\bigwedge_{j<m} (\varphi_j \leftrightarrow \Box\varphi_j) \to \bigvee_{i<n} \Box\psi_i \rhd \{\bigwedge_{j<m} \boxdot\varphi_j \to \psi_i \mid i < n\} \tag{A°}$$

Обозначим A_L — AR-систему, аксиоматизируемую:

- $A^\bullet$, если $L = GL$;
- A°, если $L = S4$;
- $A^\circ + A^\bullet$, если $L = K4$.

Базис обобщённых допустимых правил

Теорема (Э. Ержабек, 2005 г.)

Пусть $L = K4, S4, GL$. Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $\Gamma \mathrel{|\!\!\sim}_L \Delta$;
2. $A_L \vdash_{\mathsf{AR}} \Gamma \rhd \Delta$;
3. $\Gamma \rhd \Delta$ общезначима на всех расширяемых L-шкалах;
4. для любой L-проективной формулы π, если $\pi \vdash_L \Gamma$, то $\pi \vdash_L \psi$ для некоторой $\psi \in \Delta$.

Иными словами,

- $A^\bullet$ — базис обобщённых допустимых правил в GL;
- A° — базис обобщённых допустимых правил в $S4$;
- $A^\circ + A^\bullet$ — базис обобщённых допустимых правил в $K4$.

Базис обычных допустимых правил

Определение

Пусть X — множество секвенций, аксиоматизирующее A. Определим

$$\widehat{X} = \{\Box \bigwedge \Gamma \vee \Box\alpha \rhd \bigvee \boxdot\Delta \vee \alpha \mid \Gamma \rhd \Delta \in X\}$$

и $\widehat{A}$ — AR-систему правил с одним заключением, которую аксиоматизирует $\widehat{X}$.

Теорема (Э. Ержабек, 2005 г.)

- $\widehat{A}^{\bullet}$ — базис допустимых правил в GL;
- $\widehat{A}^{\circ}$ — базис допустимых правил в $S4$;
- $\widehat{A}^{\circ} + \widehat{A}^{\bullet}$ — базис допустимых правил в $K4$.

Проективность

Определение

Формула φ называется проективной в логике L, если для неё существует унификатор σ, такой что для любой $p \in \mathrm{Var}$:

$$\varphi \vdash_L \sigma(p) \leftrightarrow p. \qquad \text{(P)}$$

- (P) $\Leftrightarrow$ $\varphi \vdash_L \sigma(\psi) \leftrightarrow \psi$ для любой $\psi \in Form(L)$

Примеры

- $\varphi = p$;
- $\varphi = \neg p$;
- $\varphi = \psi \to p$.

$\sigma(p) = \top$, $\sigma(p) = \bot$ и $\sigma(p) = (\psi \to p) \to p$ их проективные унификаторы соответственно.

Свойство расширения

Определения

Вариантом модели Крипке $\mathcal{W} = \langle W, r \rangle$ называется модель Крипке $\mathcal{W}' = \langle W, r \rangle$, что $\mathcal{W}, w \Vdash p \Leftrightarrow \mathcal{W}', w \Vdash p$ для всех миров $w \neq r$. Класс K обладает свойством расширения, если для любой модели Крипке $\mathcal{W}$, такой что $\mathcal{W}_x \in K$ для всех $x \neq r$, найдётся её вариант $\mathcal{W}' \in K$.

Теорема (С. Гилярди, 2000 г.)

Пусти L — нормальное расширение $K4$ с FMP. Тогда формула φ проективна в L тогда и только тогда, когда класс её моделей Крипке $MOD(\varphi) = \{\mathcal{W} \mid \mathcal{W} \vDash \varphi\}$ обладает свойством расширения.

Проективная аппроксимация

Определение

Проективной аппроксимацией Π_φ формулы $\varphi(\bar{p})$ называется множество формул, такое что для любой $\psi \in \Pi_\varphi$:

1. $\psi \in Form(\bar{p}), d(\psi) \leqslant d(\varphi)$, ψ — проективна и $\psi \vdash_L \varphi$;
2. для любой θ с условием (1) найдётся $\psi \in \Pi_\varphi$, т. ч. $\theta \vdash_L \psi$.

Наблюдения $(L = K4, S4, GL)$

1. Для любой *проективной* формулы φ: $\varphi \mathrel{|\!\!\sim}_L \psi \Leftrightarrow \varphi \vdash_L \psi$.
2. Для *любой* формулы φ:
   - $\bigvee \Box\Pi_\varphi \mathrel{|\!\!\sim}_L \varphi$;
   - $\bigvee \Box\Pi_\varphi \mathrel{|\!\!\sim}_L \psi \;\Leftrightarrow\; \bigvee \boxdot\Pi_\varphi \vdash_L \psi$.

Проективная аппроксимация

Теорема (С. Гилярди, 2000 г.)

Пусть L — нормальное расширение $K4$ с FMP. Тогда для любой унифицируемой формулы φ в L существуют *конечная* проективная аппроксимация Π_φ и *эффективный алгоритм* её вычисления. Более того, $\varphi \mathrel{|\!\!\sim}_L \bigvee \Box\Pi_\varphi$.

Разрешимость проблемы допустимости в $L = K4, S4, GL$

Пусть $\varphi \mathrel{|\!\!\sim}_L \psi$. Тогда:

$$\bigvee \Box\Pi_\varphi \mathrel{|\!\!\sim}_L \varphi \;\Rightarrow\; \bigvee \Box\Pi_\varphi \mathrel{|\!\!\sim}_L \psi \;\Leftrightarrow\; \bigvee \boxdot\Pi_\varphi \vdash_L \psi.$$

Список литературы

Alexander Chagrov, Modal logic, Oxford University Press, New York, 1997.

Silvio Ghilardi, Best solving modal equations, Annals of Pure and Applied Logic **102** (2000), no. 3, 183–198.

Emil Jeřábek, Admissible rules of modal logics, Journal of Logic and Computation **15** (2005), no. 4, 411–431.

В.В. Рыбаков, Допустимость правил вывода и логические уравнения в модальных логиках, аксиоматизирующих доказуемость, Известия Российской академии наук. Серия математическая **54** (1990), no. 2, 357–377.