

Делимость

Определение. Число a делится на число b (или a кратно b , или b делитель a), если найдётся такое целое число q , что $a = b \cdot q$. Обозначение: $a \div b$.

Задача 1. Найдите все делители числа 36.

Задача 2. Определите, не выполняя действий, делится ли а) $18^2 - 7^2$ на 11; б) $45^3 + 55^3$ на 2500; в) $1^3 + 2^3 + \dots + 82^3$ на 83.

Задача 3. Петя считает, что если a^2 делится на $a - b$, то b^2 делится на $a - b$. Прав ли он?

Задача 4. Докажите, что

а) произведение двух последовательных чисел делится на 2; б) число $\frac{n^2+n}{2}$ — целое.

Задача 5. В каком случае два числа a и b таковы, что a делится на b и b делится на a ? (Числа могут быть и отрицательными!)

Задача 6. а) Верно ли, что если $a \div m$ и $b \div n$, то $ab \div mn$? б) Верно ли, что если $a \div b$ и $b \div c$, то $a \div c$?

Задача 7. Вася считает, что если $ab + cd$ делится на $a - c$, то $ad + bc$ тоже делится на $a - c$. Прав ли он?

Задача 8. В Тройном королевстве имеют хождение только монеты по 9 и по 15 золотых. Докажите, что такими монетами нельзя набрать сумму в 50 золотых.

Определение. Если число a можно записать в виде $a = b \cdot q + r$, где $0 \leq r < b$, то говорят, что a даёт при делении на b (неполное) частное q и остаток r .

Задача 9. Маша проболела урок и сделала примеры на деление с остатком так:

а) $20 = 3 \cdot 4 + 8$; б) $19 = 3 \cdot 5 + 4$; в) $-11 = 2 \cdot (-5) - 1$.

Объясните её ошибки.

Задача 10. Число a кратно 3. Может ли остаток от деления числа a на 12 быть равным 2?

Задача 11. а) Найдите наименьшее число (отличное от единицы), которое даёт остаток 1 при делении на 2, на 3, на 5 и на 7. б) Найдите все такие числа.

Определение. Число $p > 1$ называется простым, если кроме 1 и p оно не имеет других делителей. Число называется составным, если у него есть делитель больше 1, но меньше самого числа.

Задача 12. Найдите самое большое

а) двузначное; б) трёхзначное простое число.

Задача 13. а) Докажите, что произведение трёх последовательных чисел делится на 6. б) Докажите, что число $\frac{n^3-n}{6}$ — целое.

Задача 14. Число a даёт при делении на b частное q и остаток r . Какие частное и остаток при делении на b даст число $-a$?

Задача 15. На доске написано число 2. Каждую секунду к числу на доске прибавляют сумму его цифр. Может ли через некоторое время на доске появиться число 123456?