Тождественные преобразования

Запишите формулы сокращённого умножения

Задача 1. Даны два ненулевых числа. Если к каждому из них прибавить единицу, а также из каждого из них вычесть единицу, то сумма обратных величин четырёх полученных чисел будет равна 0. Какое число может получиться, если из суммы исходных чисел вычесть сумму их обратных величин?

Задача 2. Даны положительные числа a и b, удовлетворяющие условию $a^3+ab-b^3=(a+b)^2$. Чему может быть равна разность $a-b$?

Задача 3. Попарно различные числа a, b, c удовлетворяют условию $a^3-3a=b^3-3b=c^3-3c$. Найдите
а) a^2+ab+b^2
б) $a+b+c$
в) $a^2+b^2+c^2$

Запишите определение геометрической прогрессии

Задача 4. Пусть a, b, c – ненулевые действительные числа такие, что $(ab+bc+ca)^3=abc(a+b+c)^3$. Докажите, что числа a, b, c в некотором порядке образуют геометрическую прогрессию.

Задача 5. Докажите, что если числа x, y и z целые, то число $\frac{1}{2}\left((x-y)^4+(y-z)^4+(z-x)^4\right)$ является квадратом некоторого целого числа.

Задача 6. Сумма трёх чисел равна a, сумма обратных к этим числам равна $2a$. Оказалось, что по этим данным можно однозначно найти сумму кубов чисел. Чему равно $\frac{1}{a^2}$?

Задача 7. Прямоугольник разрезан двумя перпендикулярными прямыми на четыре меньших прямоугольника, которые раскрашены в чёрный и белый цвет в шахматном порядке. Сумма площадей чёрных прямоугольников равна сумме площадей белых прямоугольников. Докажите, что хотя бы одна из этих прямых делит изначальный прямоугольник пополам.

Задача 8. Про вещественные числа a, b и c известно, что $abc+a+b+c=10$ и $ab+bc+ac=9$. Для каких чисел x можно утверждать, что хотя бы одно из чисел a, b, c равно x? (Найдите все такие числа x и докажите, что других нет.)

Домашнее задание

Задача 1. Даны два числа (не обязательно целые), не равные 0. Если каждое из них увеличить на единицу, их произведение увеличится вдвое. А во сколько раз увеличится их произведение, если каждое из исходных чисел возвести в квадрат и затем уменьшить на единицу?
Задача 2. Найдите величину выражения $\frac{1}{1+x^2}+\frac{1}{1+y^2}+\frac{2}{1+xy}$, если известно, что $x \neq y$ и сумма первых двух слагаемых выражения равна третьему.

Задача 3. Докажите, что если имеет место равенство
$(y-z)^2+(z-x)^2+(x-y)^2=(y+z-2x)^2+(z+x-2y)^2+(x+y-2z)^2$,
то $x=y=z$.