Метод математической индукции

0. Докажите, что квадрат размера 16×16 с одной вырезанной клеткой можно разбить на уголки из трех клеток.

1. Докажите, что для $\forall\, n \in N$ выполняется:

а) $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$,

б) $1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$.

- **База (основание)** индукции.

  Доказать, что утверждение справедливо при $n = 1$ (или при $n = n_0$ если доказывается, что утверждение справедливо для всех $n \geq n_0$).
- Индуктивный **шаг (переход)**.

  Доказать, что из справедливости утверждения для $n = k$, где $n = k$ — произвольное натуральное число, следует справедливость утверждения для $n = k + 1$.

2.1 Докажите, что квадрат можно разрезать на любое число квадратов, начиная с 6.

2.2 Докажите, что любую сумму, начиная с 8 копеек, можно уплатить монетами в 3 и 5 копеек.

3.1 Докажите, что для $\forall\, x > -1$ и $\forall\, n > 1,\ n \in N,$ верно, что $(1 + x)^n \geq 1 + nx$.

3.2 Найдите, для каких натуральных n верно, что $2^n > 100n$.

4.1 Докажите, что число $11^{n+2} + 12^{2n+1}$ делится на 133.

4.2 Докажите, что $P(n) = 2^{2n-1} - 9n^2 + 21n - 14$ делится на 27 при всех $n \in N$.

Домашнее задание

1. Докажите формулу: $1 \cdot 1! + 2 \cdot 2! + \dots + n \cdot n! = (n + 1)! - 1$.

2. Ваня рвет каждый кусок бумаги на 4 части, а Таня – на 6. Докажите, что вместе они могут разорвать газету на любое количество частей, начиная с 9.

3. Для каких натуральных n выполняется неравенство $2^n > n^2$?

4. Докажите, что сумма кубов трех последовательных чисел $\in N$ делится на 9.