Метод интервалов.

📖 ***Алгоритм решения неравенств методом интервалов:***

1) Найдите нули числителя и знаменателя (если он есть), определите их кратность;

2) Отметьте все нули на координатной оси; если неравенство строгое, выкалываются все нули, если нестрогое, то нули знаменателя выкалывают, а нули числителя – нет;

3) Определите знак выражения правее нуля, стоящего на оси правее всех остальных и нарисуйте волну, меняя знак, если нуль нечётной кратности, и не меняя знак, если нуль чётной кратности;

4) Заштрихуйте решение и запишите ответ. Не забудьте включить в него изолированные точки, являющиеся решениями.

1. Решите неравенство: $\frac{(x^2+2x-3)(x^2-16)}{(x^2-1)(x^2-9)} \geq 0.$

2. Решите неравенство: $\frac{(4-7x)(x^2+2)}{(x-3)(x-2)} > 0.$

3. Решите неравенство: $\frac{3-x}{(x+2)(x-1)} \leq \frac{2(3-x)}{2x^2-x-1}.$

4. Для каждого значения a решите неравенство: $\frac{x(x-a)}{x+3} \leq 0$

5. При каких значениях a множеством решений неравенства $(x+a)^2(x-6)(5x-2)<0$ является числовой промежуток $(0{,}4; 6)$?

Решение неравенств методом замены множителей (методом рационализации).

Любое неравенство приводимо к виду: $\frac{u_1 \cdot u_2 \cdot \ldots \cdot u_n}{v_1 \cdot v_2 \cdot \ldots \cdot v_n} \vee 0 \quad (1)$

где символ «v» обозначает один из четырех возможных знаков неравенства: <,<,≥, ≤. Любой множитель в этом неравенстве можно заменить на другой ***знакосовпадающий с ним в области определения*** неравенства и имеющий в этой области те же корни. Этот факт определяет основную идею метода замены множителей.

Замена множителя осуществляется только (!) при условии приведения неравенства к виду (1), то есть когда требуется сравнить выражение, стоящее в левой части неравенства, с нулем. Замена множителя обосновывается двумя следующими утверждениями.

Утверждение 1. Если функция f(x) - строго (!) возрастающая, то для любых двух значений t_1 и t_2 из области определения функции разность $(t_1 - t_2)$ совпадает по знаку с разностью $f(t_1) - f(t_2)$.

$$\text{Утв. 1}: f\nearrow \Leftrightarrow \left(t_1 - t_2 \overset{\text{ОДЗ}}{\leftrightarrow} f(t_1) - f(t_2)\right)$$

(↔ означает знакосовпадение).

Утверждение 2. Если функция f(x) - строго (!) убывающая, то для любых двух значений t_1 и t_2 из области определения функции разность $(t_1 - t_2)$ совпадает по знаку с разностью $f(t_2) - f(t_1)$.

$$\text{Утв. 2}: f\searrow \Leftrightarrow \left(t_1 - t_2 \overset{\text{ОДЗ}}{\leftrightarrow} f(t_2) - f(t_1)\right).$$

1.Поскольку функция ***y = t^n*** при $n > 0$ является строго возрастающей на множестве неотрицательных чисел (а при нечетном натуральном n— на всей числовой оси), то в силу утверждения 1 справедливы замены:

$t_1 - t_2 \leftrightarrow t_1^n - t_2^n$ **при** $n > 0,\ t_1 \geqslant 0,\ t_2 \geqslant 0,$

$t_1 - t_2 \leftrightarrow t_1^{2k-1} - t_2^{2k-1}$ **при** k **натуральном.**

2.Функции $y = t^2$ **и** $y = \sqrt{t}$, рассматриваемые на множестве неотрицательных чисел, являются взаимнообратными и строго возрастающими, то есть

$$t_1 \vee t_2 \Leftrightarrow t_1^2 \vee t_2^2 \Leftrightarrow \sqrt{t_1} \vee \sqrt{t_2}. \quad t_1 - t_2 \leftrightarrow t_1^2 - t_2^2,$$

$$\sqrt{t_1} - \sqrt{t_2} \leftrightarrow t_1 - t_2, \text{ где } t_1, t_2 \geqslant 0.$$

3. Так как $|m| \geq 0$ и $|m|^2 = m^2$ для любого m, то получаем, что

$$|t_1| - |t_2| \leftrightarrow |t_1|^2 - |t_2|^2 \leftrightarrow t_1^2 - t_2^2.$$

6. Решите неравенство: $\dfrac{\left(|x-2| - 4 - x^2\right)\cdot\left(|x+4| - \sqrt{x^2 - x - 2}\right)}{\left(|1-x| - 4\right)\cdot\left(|3+x| - |x-5|\right)} > 0$

4. Показательная функция ***y=a^t*** строго убывает при $0 < a < 1$ и строго возрастает при $a > 1$. Поэтому для произвольного основания a:

$$a^{t_1} - a^{t_2} \leftrightarrow (t_1 - t_2)(a - 1).$$

5.Для логарифмической функции $y = \log_a x$ можно заменить множитель следующим образом:

$$\log_a t_1 - \log_a t_2 \leftrightarrow \frac{(t_1 - t_2)}{a-1}.$$

Полезные схемы решения показательных и логарифмических неравенств:

1) $a^f > a^g \Leftrightarrow \begin{cases}(f-g)(a-1) > 0; \\ a > 0\end{cases}$ 2) $\log_a f > \log_a g \Leftrightarrow \begin{cases}(f-g)(a-1) > 0 \\ a > 0,\ f > 0,\ g > 0\end{cases}$;

3) $\dfrac{a^f - a^g}{a^\varphi - a^\phi} > 0 \Leftrightarrow \dfrac{f-g}{\varphi - \phi} > 0$; 4) $\log_a f + \log_a g > 0 \Leftrightarrow \begin{cases}(f\cdot g - 1)(a-1) > 0, \\ a > 0,\ f > 0,\ g > 0\end{cases}$

7. Решите неравенства: а) $\log_{x^2}(3 - 2x) > 1$;

б) $\log_{\frac{2x+2}{5x-1}}(10x^2 + x - 2) \leq 0$; в) $\dfrac{(x^2+x)\cdot\log_{x+2}(x+1)\cdot\log_7(x-2)^2}{2x^2+5x+2} \leq 0$;

г) $\dfrac{\left(|x+4| - \sqrt{x^2-x-2}\right)\cdot\left(|x-2| - 4 - x^2\right)\cdot\left(\log_{x^2}(3-2x) - 1\right)}{\left(|1-x| - 4\right)\cdot\left(|3+x| - |x-5|\right)} > 0.$