Теорема Фалеса. Подобие треугольников.

Как начать изучение понятия «Подобие фигур» на плоскости в 8-м классе?

Отметим, что к моменту начала изучения подобия необходимо изучить параллельность, основные свойства и признаки параллелограмма.

Центральным понятием при изучении подобия является *пропорциональность величин.*

Поэтому сначала необходимо вспомнить понятие пропорциональности величин и коэффициента пропорциональности.

Нужно напомнить, что говорить о пропорциональности можно относительно только двух или более пар чисел.

То есть, если есть две пары чисел $(a; b)$ и $(c; d)$, то возможно, что отношения соответствующих элементов этих пар равны (a — $\underline{\text{первый}}$ элемент первой пары, и c — $\underline{\text{первый}}$ элемент второй пары и т.д. То есть

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}, \frac{c}{a} = \frac{d}{b}.$$

В этом случае говорят, что пары $(a; b)$ и $(c; d)$ или пары $(c; d)$ и $(a; b)$ пропорциональны (прямо пропорциональны).

Каждое из равных отношений $\underline{\underline{\textit{соответствующих}}}$ *элементов данных пропорциональных пар* называют *коэффициентом пропорциональности данных пар.*

Например, пары $(6; 4)$ и $(12; 8)$ пропорциональны, так как $\dfrac{6}{12} = \dfrac{4}{8}$ и $\dfrac{12}{6} = \dfrac{8}{4}$. Коэффициент пропорциональности этих пар равен $\dfrac{6}{12} = \dfrac{4}{8} = k = 0,5$ или $\dfrac{12}{6} = \dfrac{8}{4} = \dfrac{1}{k} = 2$ в зависимости от того, какая из пар названа первой.

В общем случае набор $(a, b, c, ..., p)$ пропорционален набору $(a_1, b_1, c_1, ..., p_1)$ с коэффициентом пропорциональности $k > 0$, если

$$\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{c}{c_1} = ... = \frac{p}{p_1} = k > 0,$$

Пропорциональность можно записывать и с помощью двух точек — знака деления

$$a : a_1 = b : b_1 = c : c_1 = ... = p : p_1 = k.$$

Например, $2 : 3 = 6 : 9 = 18 : 27 = \frac{2}{3}$.

Необходимо вспомнить о свойствах пропорций и о производных пропорциях.

Свойства равных отношений (пропорций).

1) $a : a_1 = b : b_1 = k \Rightarrow (\alpha a) : (\alpha a_1) = (\beta b) : (\beta b_1) = k$, $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} = k \Rightarrow \dfrac{\alpha a}{\alpha a_1} = \dfrac{\beta b}{\beta b_1} = k$.

2) $a : a_1 = b : b_1 = k \Rightarrow (\alpha a) : a_1 = (\alpha b) : b_1 = (\alpha k)$, $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} = k \Rightarrow \dfrac{\alpha a}{a_1} = \dfrac{\alpha b}{b_1} = \alpha k$.

3) $a : a_1 = b : b_1 = k \Rightarrow a : a_1 = b : b_1 = (a+b) : (a_1+b_1) = k$, $\frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = k \Rightarrow \frac{a}{a_1} = \frac{b}{b_1} = \frac{a+b}{a_1+b_1} = k$.

Производные пропорции.

1) $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} = k \Rightarrow \dfrac{a+a_1}{a_1} = \dfrac{b+b_1}{b_1} = k+1.$

2) $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} = k \Rightarrow \dfrac{a}{a_1+a} = \dfrac{b}{b_1+b} = \dfrac{k}{k+1}.$

3) $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} = k \Rightarrow \dfrac{a-a_1}{a_1} = \dfrac{b-b_1}{b_1} = k-1.$

4) $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} = k \Rightarrow \dfrac{a}{a_1-a} = \dfrac{b}{b_1-b} = \dfrac{k}{1-k}.$

5) $\dfrac{a}{a_1} = \dfrac{b}{b_1} \Rightarrow \dfrac{a}{b} = \dfrac{a_1}{b_1}.$

Задача 1.1.

1) Выразите равные отношения, как равные отношения целых чисел, если $1,2 : 3 = 3,5 : 8,75$

2) Найдите неизвестный член равных отношений, если $3,2 : 12,8 = a : 6$.

3) Из данной пропорции найдите отношение $\frac{a}{r}$, если $\frac{R}{r} = \alpha$ и $\dfrac{R-a}{r+a} = \dfrac{1}{3}$.

4) Из данной пропорции найдите отношение $\frac{R}{r}$, если $\dfrac{R-r}{r} = \dfrac{r}{R+r}$.

5) Найдите отношение $\dfrac{A_1G}{GA} = \dfrac{p-a}{p-b}\dfrac{a}{p-c}$, если $p = a+b+c, a : b : c = 3 : 4 : 5$.

Одно из важнейших точек прямой состоит в том, что существует ровно две точки, каждая из которых делит данный отрезок внешним и внутренним образом в одном и том же отношении λ, если $\lambda \neq 1$

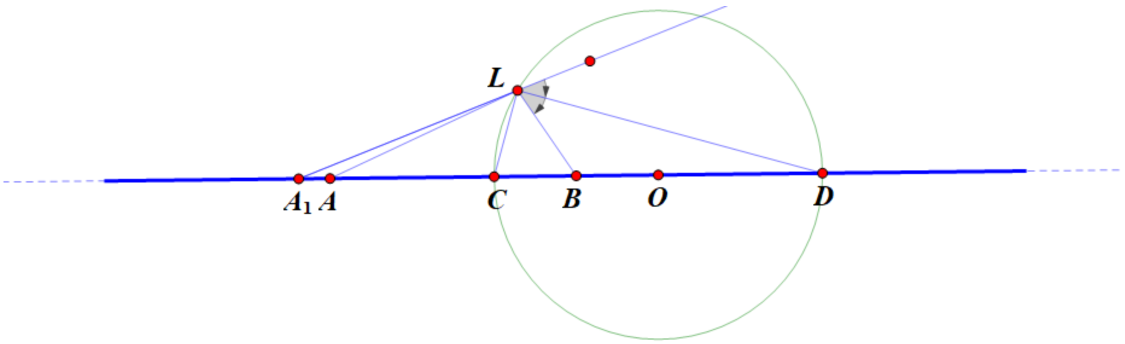


Рис. 1:

На рисунке точки C и D делят отрезок AB в одном и том же отношении $\lambda \neq 1$, точка C внутренним образом, а точка D — внешним образом и называются *гармонически сопряжёнными относительно точек* A *и* B.

Из свойств отношений следует, что в этом случае точки A и B гармонически сопряжены относительно точек C и D.

Множество всех точек L *плоскости для которых отношение* $\dfrac{AL}{LB} = \lambda > 0$ *есть окружность или серединный перпендикуляр отрезка* AB *в случае* $\lambda = 1$.

Эта окружность называется *окружностью Аполлония.*

Одна из основополагающих теорем курса планиметрии, связанная с подобием — *теорема Фалеса.*

Напоминаю формулировку.

Теорема. Если на одной из двух(или более) прямых отмечены точки A, B, C так, что $AB = BC$ и через точки A, B, C проведены параллельные между собой прямые AA', BB', CC', пересекающие вторую прямую в точках A', B', C', то $A'B' = B'C'$

Доказательство. Сначала предположим, что точки A, B, C отмечены на прямой a и прямые a и b параллельны: $a \| b$,

пусть точки A', B', C' лежат на прямой b и $AA' \| BB' \| CC'$. Докажем, что

$$(AB = BC) \Rightarrow (A'B' = B'C')\,.$$

Доказательство этого утверждения не вызывает затруднений учеников. Его можно обсуждать как задачу на уроке.

Пусть теперь прямые a и b не параллельны: $a \not\| b$ и пересекаются в точке O.

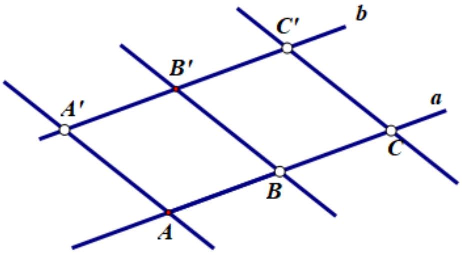


Рис. 2:

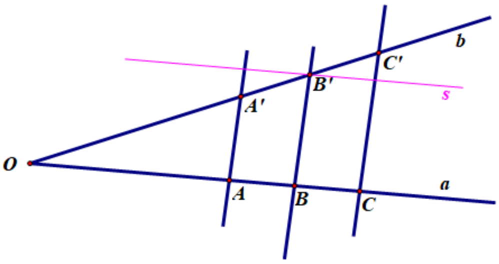


Рис. 3:

Эту задачу тоже можно обсуждать на уроке, но возможно, придётся подсказать свести к рассмотренному случаю (провести прямую $s \| a, B' \in s$).

Далее можно перейти к теореме о пропорциональных отрезках — обобщённой теореме Фалеса, — задав вопрос:

как изменится утверждение теоремы Фалеса, если $AB = BC$*, например,* $AB = 5; BC = 10$?

Как правило, ответ на этот вопрос будет получен: $A'B' : B'C' = 1 : 2$.

Здесь нужно попросить этот факт доказать. А потом и обобщить.

Понятие подобия — одно из основных понятий геометрии и его полезно начать изучать пораньше, начиная с 8 класса, а затем продолжить и обобщить в 9-м классе.

В восьмом классе важно сказать о преобразовании плоскости, но без точных формулировок — на интуитивном уровне.

Конечно, невозможно давать определение подобия как преобразование плоскости в 8-м классе, поскольку пока ещё не сформулировано понятия соответствия – функции. Поэтому моя рекомендация состоит в описании подобия как некоторого сходства фигур. Например, понятно что все круги обладают очевидным сходством. Точно также очевидным сходством обладают квадраты. Что касается других фигур, например, прямоугольников, треугольников, трапеций, ромбов и более сложных фигур, то они могут иметь интуитивное сходство, но могут этого сходства и не иметь.

В связи с этим я предлагаю такие задачи.

Задача 1.2. Дан прямоугольник со сторонами 18 и 12. Требуется одним разрезом, параллельным его стороне, отсечь прямоугольник подобный данному.

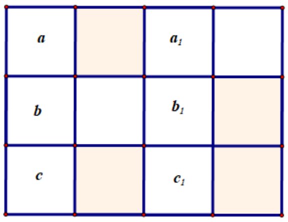
Или более простую задачу.

Задача 1.3. Даны четыре прямоугольника

$$2 \times 3; \quad 18 \times 12; \quad 5 \times 6; \quad 2,4 \times 3,6; \quad 9 \times 10,8.$$

Найдите среди них пары подобных и обоснуйте свой выбор.

Задача 1.4. Заполните четыре выделенные ячейки так, чтобы затем получить длины всех сторон подобных треугольников со сторонами a, b, c и a_1, b_1, c_1.



a	▨	a_1	
b		b_1	▨
c	▨	c_1	▨

Рис. 4:

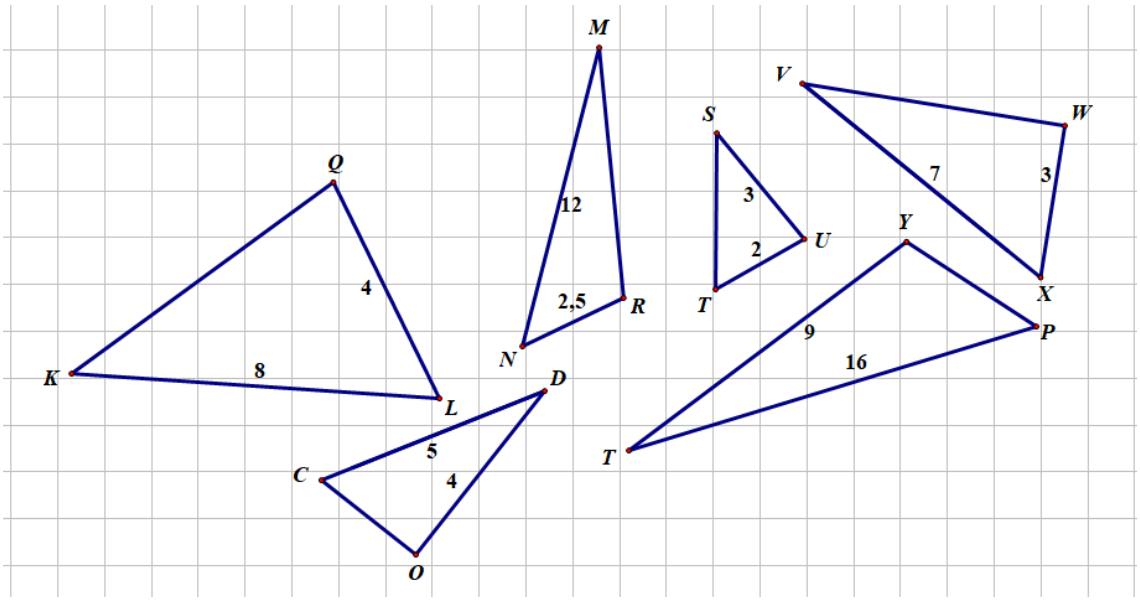


Рис. 5:

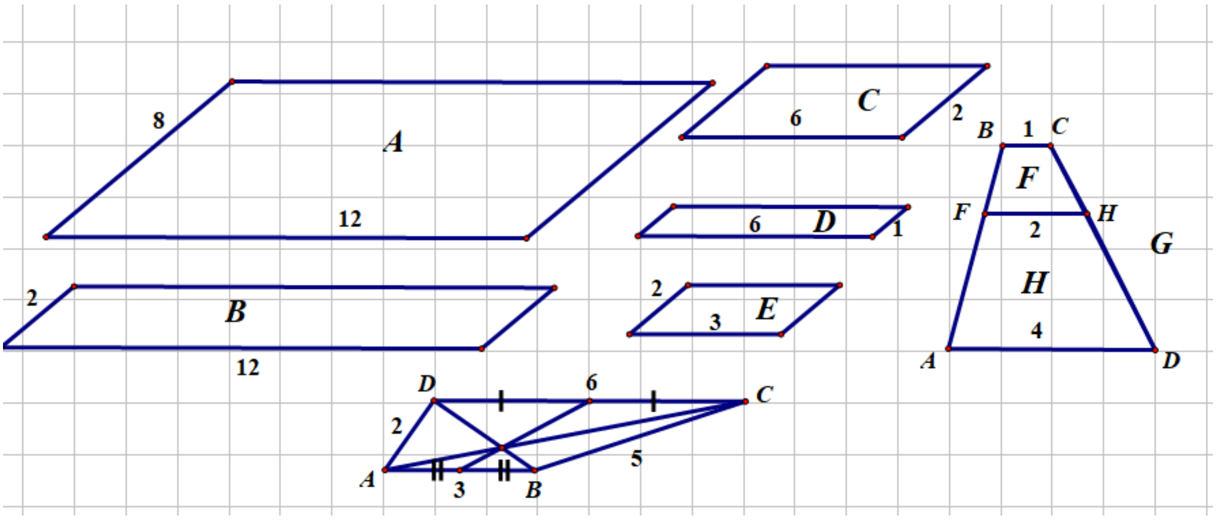


Рис. 6:

Более сложным является задание на отыскание подобия в параллелограммах и трапециях.

Целью этих упражнений является подведение учеников к идее сравнения расстояний: *в подобных фигурах расстояния между соответствующими точками пропорциональны — имеют равные отношения.*

После этого можно переходить к более точным определениям, связанным с преобразованием плоскости.

Определение 1. Подобие — это такое преобразование плоскости (фигур на плоскости), при котором расстояния между соответствующими точками изменяются в одно и тоже число раз.

Более точно,

если φ — преобразование подобия данной плоскости, то каждой точке A этой плоскости соответствует единственная $\varphi(A)$ точка этой же плоскости, причём различным точкам соответствуют различные их образы и каждая точка плоскости получена из некоторой точки этой плоскости (говорят, является прообразом каждой точки данной плоскости).

При этом расстояние между образами $A_1 = \varphi(A)$ и $B_1 = \varphi(B)$ произвольных точек A и B равно расстоянию между самими этими точками, умноженному на постоянное положительное число k — коэффициент подобия, :

$$|A_1B_1| = k \cdot |AB|\,, k > 0.$$

Говорят, что любые два отрезка при преобразовании подобия переходят в пропорциональные им отрезки с одним и тем же коэффициентом пропорциональности:

$$\frac{AB}{CD} = \frac{A_1B_1}{C_1D_1} \Leftrightarrow \frac{AB}{A_1B_1} = \frac{CD}{C_1D_1}.$$

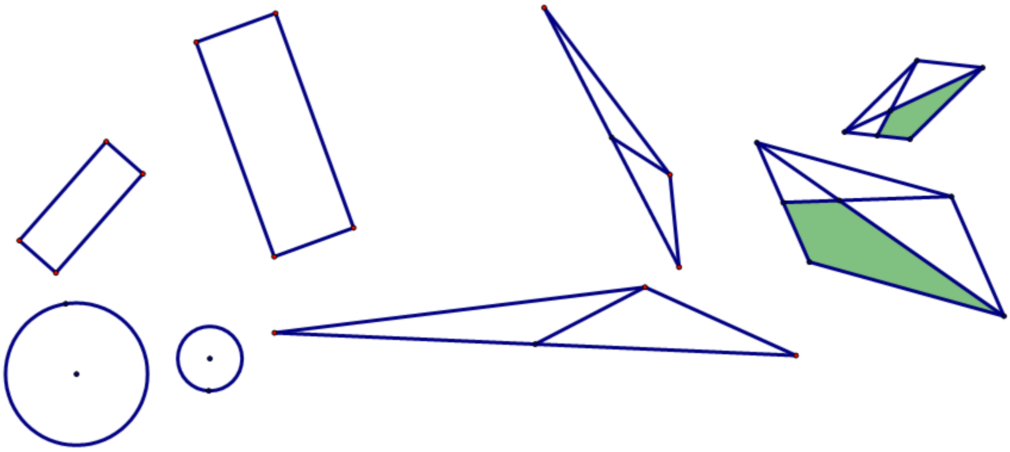


Рис. 7:

Важно знать и уметь доказывать, что преобразование подобия прямую линию переводить в прямую, луч в луч, отрезок в отрезок, треугольник в треугольник, угол в равный ему угол, параллельные прямые в параллельные прямые, пересекающиеся прямые в пересекающиеся прямые, трапецию в трапецию, параллелограмм в параллелограмм, окружность в окружность и т.п. Но обычно эти доказательства рассматривают в 10-11 классах, а мы сейчас говорим про 8-й класс. Докажем, что преобразование подобия прямую линию переводит в прямую.

Доказательство. Пусть точки A, B, C принадлежат прямой l и $AB = AC + CB$. Пусть φ — преобразование подобия с коэффициентом подобия, равным k и

$$\varphi(A) = A_1; \varphi(B) = B_1; \varphi(C) = C_1.$$

Тогда

$$A_1B_1 = kAB, A_1C_1 = kAC, C_1B_1 = kCB.$$

Найдём сумму

$$A_1B_1 - A_1C_1 - C_1B_1 = k(AB - AC - BC) = k \cdot 0 = 0 \Leftrightarrow A_1B_1 = A_1C_1 + C_1B_1.$$

А это означает, что точки A_1, B_1, C_1 лежат на одной прямой $l_1 = \varphi(l)$, что и требовалось доказать.

Примеры применения теоремы Фалеса мы видим при изучении свойств средней линии треугольника и трапеции.

Свойства средней линии встречается в задачах разной сложности.

Задача 1.5. В треугольнике ABC на стороне AC от точки A отложены по порядку точки D, E, F так, что $AD = DE = EF = FC$ и через эти точки проведены отрезки, параллельные соответственно сторонам BC и AB, причём концы этих отрезков обозначены точками D', E', F' на BC и D'', E'', F'' на AB. Известно, что $DD' = 42; DD'' = 4$. Найдите AB и BC.

Задача 1.6. Стороны треугольника AB и AC треугольника ABC продолжены за точки B и C до точек B' и C' соответственно так, что $BC||B'C'$. Найдите стороны треугольника $AB'C'$, если $B'C' = 6,4$.

Важное применение средней линии треугольника мы видим в параллелограмме Вариньона, вершинами которого являются середины сторон произвольного четырёхугольника, включая и неплоский случай.

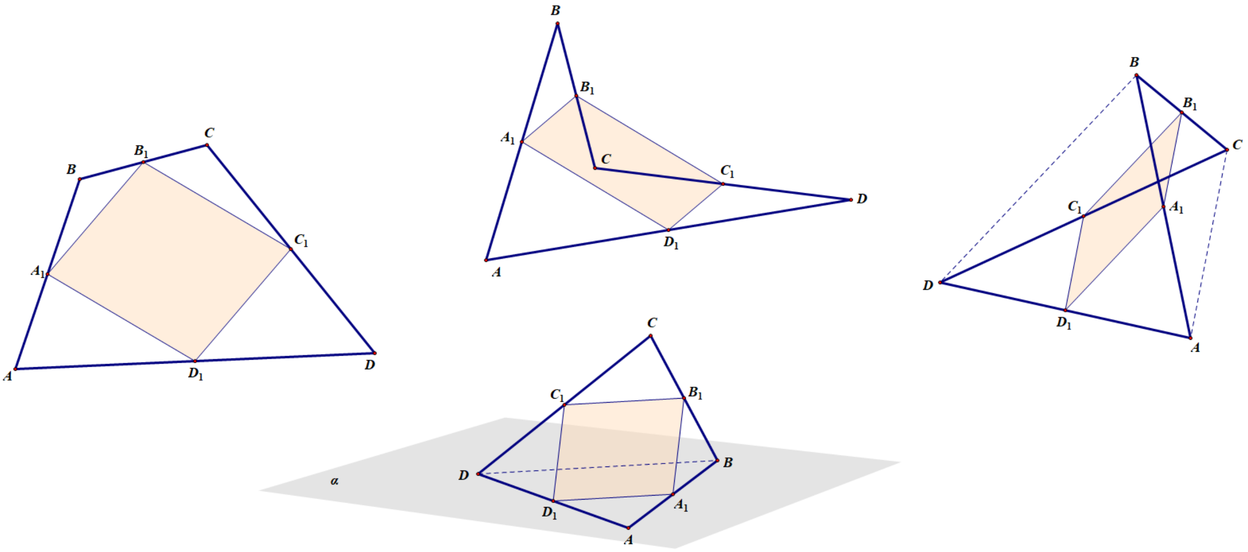


Рис. 8:

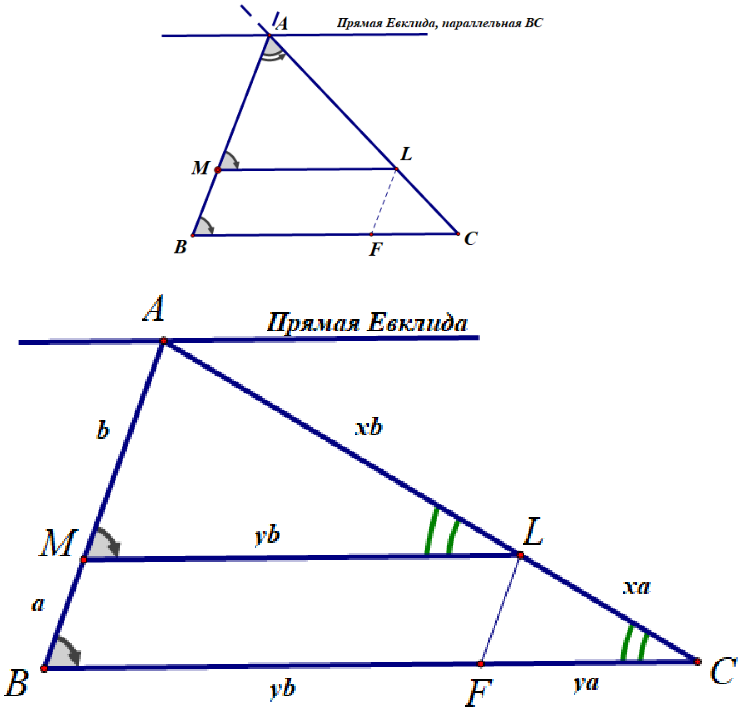
При решении задач применение свойств подобных треугольников нужно обязательно обосновывать! Для этого используют

Признаки подобия треугольников.

Основная лемма о подобии треугольников. *Прямая, параллельная стороне треугольника и пересекающая две другие его стороны, отсекает от него треугольник, подобный данному.*

Доказательство. Для доказательства леммы можно применить теорему о пропорциональных отрезках и замечания к ней.

1) Пусть в треугольнике ABC прямая $ML||BC$, причём точки M и L лежат на сторонах AB и AC соответственно. Докажем, что $\triangle ABC \overset{k}{\sim} AML, k = AB/AM$.(Левый рисунок)



$$\triangle ABC \sim \triangle AML \quad \text{и} \quad \frac{AB}{AM}=\frac{a+b}{b};\ \frac{BC}{ML}=\frac{a+b}{b};\ \frac{AC}{AL}=\frac{a+b}{b} \Rightarrow \frac{AB}{AM}=\frac{BC}{ML}=\frac{AC}{AL}=\frac{a+b}{b}=k>1$$

Рис. 9:

В самом деле, из свойств параллельных следует равенство углов при вершинах B и M, а также при вершинах L и C. Угол при вершине A — общий для этих треугольников.

2) Проводим прямую Евклида через вершину A. Тогда по следствию из теоремы о пропорциональных отрезках получим

$$\frac{AB}{AM}=\frac{AC}{AL};$$

обозначим $\frac{AB}{AM}=k$.

3) Пусть прямая $LF||AB$ и пересекает сторону BC в точке F. Тогда опять по теореме о пропорциональных отрезках имеем

$$\frac{CA}{LA}=\frac{CB}{FB}.$$

Но по свойству параллельных отрезков, заключённых между параллельными прямыми, имеем $ML = FB$. Поэтому получаем

$$\frac{AC}{AL} = \frac{CA}{LA} = \frac{CB}{FB} = \frac{BC}{ML} \Rightarrow k = \frac{AB}{AM} = \frac{AC}{AL} = \frac{BC}{ML},$$

что и требовалось доказать.

Отметим, что полезно рассмотреть «алгебраическое» доказательство основной леммы, опирающееся на буквенные обозначения, которые часто используют при решении задач.(Правый рисунок)

С помощью доказанной леммы доказываются три основных признака подобия треугольников.

Признак подобия треугольников по двум углам. *Если два угла треугольника соответственно равны двум углам второго треугольника, то эти треугольники подобны.*

Доказательство

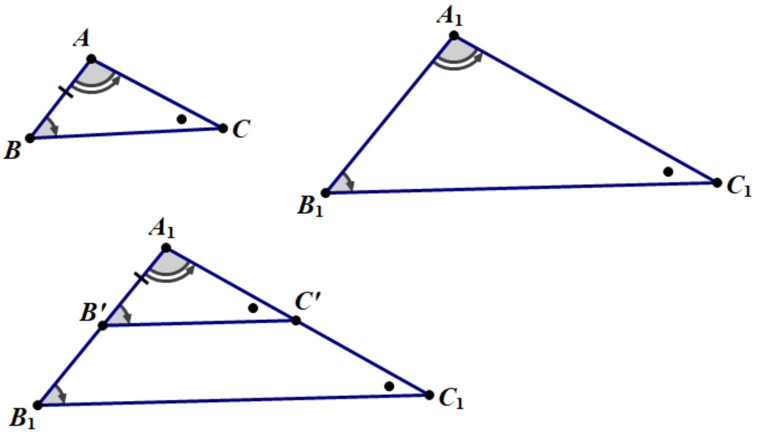


Рис. 10:

Пусть в треугольниках ABC и $A_1B_1C_1$ выполнены равенства $\angle B = \angle B_1; \angle C = \angle C_1$. Докажем, что $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$.

1) Из условия следует, что $\angle A = \angle A_1$, поскольку сумма углов треугольника равна 180°.

2) Будем считать, что $A_1B_1 \neq AB$, так как иначе треугольники были бы равны по стороне и двум прилежащим углам и, следовательно, были бы подобны с коэффициентом подобия, равным 1. Для определённости будем считать, что $A_1B_1 > AB$.

3) Отложим на стороне A_1B_1 отрезок $AB' = AB$ и проведём прямую через точку B' параллельно стороне B_1C_1 до её пересечения со стороной A_1C_1 с точке C'.

Тогда треугольник $A_1B'C'$ будет подобен треугольнику $A_1B_1C_1$ по лемме о подобии, а также $\triangle A_1B'C' = \triangle ABC$ по стороне и двум прилежащим к ней углам: $A_1B' = AB$ и $\angle B' = \angle B_1 = \angle B$ и $\angle A_1 = \angle A$.

Отсюда следует, что $\triangle A_1B_1C_1 \sim \triangle ABC$, что и требовалось доказать.

Аналогично можно доказать признак подобия по углу и двум сторонам, заключающим эти равные углы и по трём сторонам.

Признак подобия треугольников по углу и двум сторонам. *Если угол одного треугольника соответственно равен углу другого треугольника, а стороны, заключающие эти равные углы пропорциональны, то эти треугольники подобны.*

Признак подобия треугольников по трём сторонам. *Если три стороны треугольника соответственно пропорциональны трём сторонам другого треугольника, то эти треугольники подобны.*

Задача 1.7. Докажите эти признаки подобия.

Задача 1.8. Докажите, что отношение площадей подобных треугольников равно квадрату коэффициента подобия.

Дальнейшее изучение темы «Подобие треугольников» состоит в изучении конструкций, приводящих к подобию.

Соотношения в прямоугольном треугольнике, вытекающие из подобия.

Среди таких опорных конструкций на первом месте, видимо, находятся конструкции, связанные с прямоугольным треугольником.

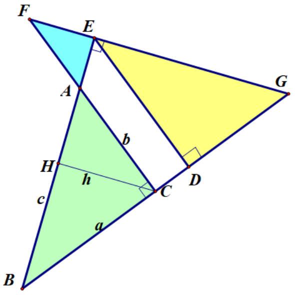


Рис. 11:

Задача 1.9. Рассмотрите подобия в четырёхстороннике, чевианы BE и FC которого, пересекающиеся в точке A, образуют прямоугольные треугольники BEG, CFG и ABC. Пусть ED — высота треугольника BEG, проведённая из его прямого угла E, а CH — высота треугольника ABC, проведённая из его прямого угла C.

Пусть $AB = c; AC = b; BC = a; AF = p$. Тогда

1) $c^2 = a^2 + b^2$. Теорема Пифагора.

2) $h = \dfrac{ab}{c}$.

3) $h = \sqrt{AH \cdot BH}$.

4) $a^2 = c \cdot BH$.

5) $b^2 = c \cdot AH$.

6) $\dfrac{AH}{BH} = \dfrac{b^2}{a^2}$.

7) $AE = \dfrac{bp}{c}$.

8) $FE = \dfrac{ap}{c}$.

9) $CD = \dfrac{abp}{c^2}$.

10) $AB \cdot FE = AF \cdot AC$.

11) $DE = \dfrac{b}{c^2}(c^2 + bp)$.

12) $BE = c + \dfrac{bp}{c}$.

Соотношения в треугольнике, параллелограмме и трапеции, связанные с подобием.

Задача 1.10. *Расстояние от ортоцентра остроугольного треугольника до его вершин.*

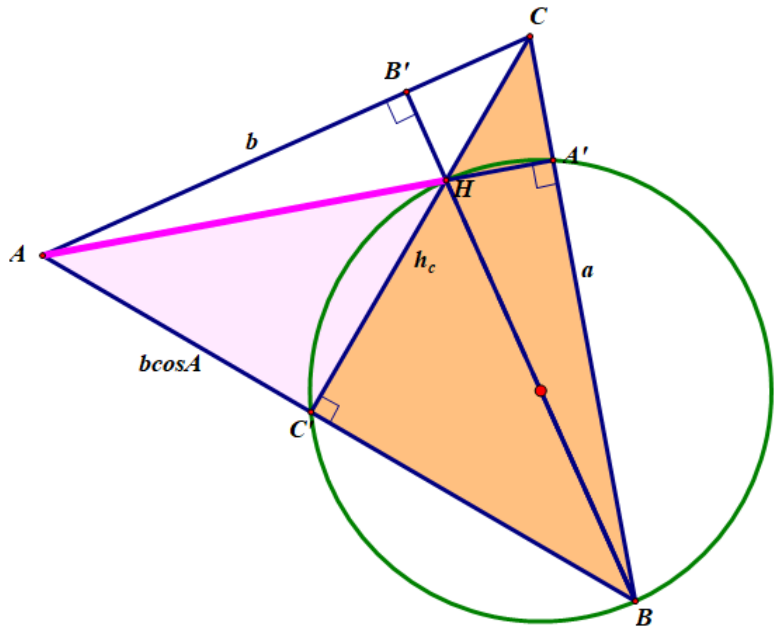


Рис. 12:

$$\triangle AHC' \sim \triangle CBC' \Rightarrow \frac{AH}{CB} = \frac{AC'}{CC'} \Rightarrow \frac{AH}{a} = \frac{b\cos A}{b\sin A} \Rightarrow AH = a\operatorname{ctg} A.$$

Или $\triangle AB'H \sim \triangle BB'C \Rightarrow \dfrac{AH}{BC} = \dfrac{AB'}{BB'} \Rightarrow \dfrac{AH}{a} = \operatorname{ctg} A$, поскольку в $\triangle ABB'$ $\operatorname{ctg} A = \dfrac{AB'}{BB'}$.

$$\triangle AHC' \sim \triangle CHA' \Rightarrow \frac{AH}{CH} = \frac{HC'}{HA'} \Rightarrow AH \cdot HA' = CH \cdot HC'.$$

$\triangle AA'B \sim \triangle AC'H \Rightarrow \dfrac{AA'}{AC'} = \dfrac{AB}{AH} \Rightarrow AA' \cdot AH = AB \cdot AC'$. (Степень точки A относительно окружности с диаметром BH).

Задача 1.11. *Биссектриса угла параллелограмма и подобие.*

1) Пусть в параллелограмме $ABCD, AB < BC$ биссектриса угла ABC пересекает сторону AD в точке E, а луч $[CD)$ — в точке F. Найдите отношение площади параллелограмма $ABCD$ к площади треугольника BCF, если отношение $AB : BC = 1 : 2 = k$.

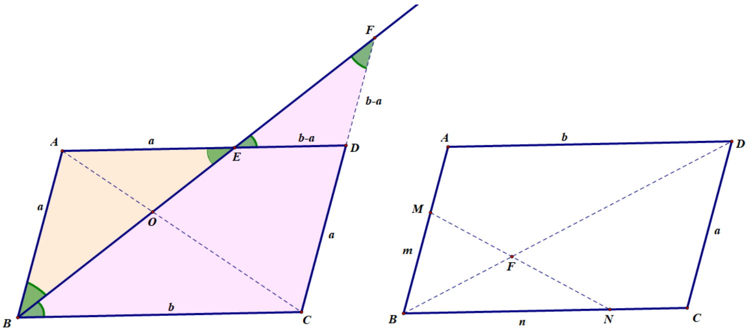


Рис. 13:

2) Докажите:

$$\frac{DF}{BF} = \frac{a}{m} + \frac{b}{n} - 1.$$ (Рисунок справа.)

Задача 1.12. *Трапеция и соотношения подобия.*

Опорной в этой конструкции является задача о вычислении длины отрезка, параллельного основаниям трапеции, если задано отношение, в котором этот отрезок делит боковую сторону, или площадь трапеции, и наоборот.

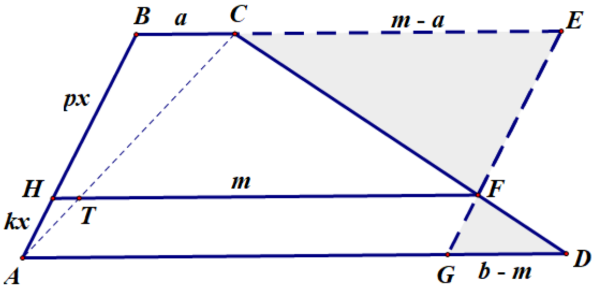


Рис. 14:

Вычислим, длину отрезка $HF = m$, параллельного основаниям $AD = a; BC = b$

трапеции $ABCD$, если точка H делит боковую сторону AB в отношении $\lambda = k : p$ и точка $F \in CD$.

Проводим отрезок $EG||AB$ через точку F, причём $E \in BC, G \in AD$. Тогда

$$\triangle DFG \sim \triangle CFE$$

и $\dfrac{DG}{CE} = \dfrac{DF}{FC}$ и по теореме о пропорциональных отрезках

$$\lambda = \frac{k}{p} = \frac{AH}{HB} = \frac{DF}{FC}.$$

Замечаем, что $CE = m - a; DG = b - m$ по свойству сторон параллелограммов $BHFE$ и $HFGA$ и отсюда находим

$$\frac{b-m}{m-a} = \frac{k}{p} = \lambda \Leftrightarrow m = \frac{ka+pb}{k+p} = \frac{\lambda a + b}{\lambda + 1}.$$

Этот же результат можно получить иначе, проведя диагональ трапеции, например, AC. Тогда, используя подобия

$$\triangle AHT \sim \triangle ABC \quad \text{и} \quad \triangle CTF \sim \triangle CAD,$$

получаем

$$m = HT + TF = \frac{ka}{k+p} + \frac{pb}{k+p} = \frac{ka+pb}{k+p}.$$

Интересны две конфигурации:

1) теорема о четырёх точках трапеции;

середины оснований трапеции, точка пересечения её диагоналей и точка пересечения продолжений боковых сторон трапеции лежат на одной прямой (коллинеарны.)

Если O — точка пересечения диагоналей трапеции и точка F — середина AD, то в силу подобия $\triangle AOD \sim \triangle COB$ прямая FO содержит медиану OG треугольника $\triangle COB$ и, значит, точки F, O, и G лежат на одной прямой.

Аналогично, в силу подобия $\triangle AED \sim \triangle BEC$ точки F, O, и E лежат на одной прямой. Поэтому все четыре точки

$$E, F, O \quad \text{и} \quad G$$

коллинеарны.

2) конкурентность диагоналей равнобокой трапеции и прямой, проходящей через точки касания боковых сторон с её вписанной окружности.

прямые, содержащие диагонали описанной равнобокой трапеции, точки касания вписанной окружности её боковых сторон и прямая, проходящая через середины оснований трапеции проходят через одну точку (конкурентны.)

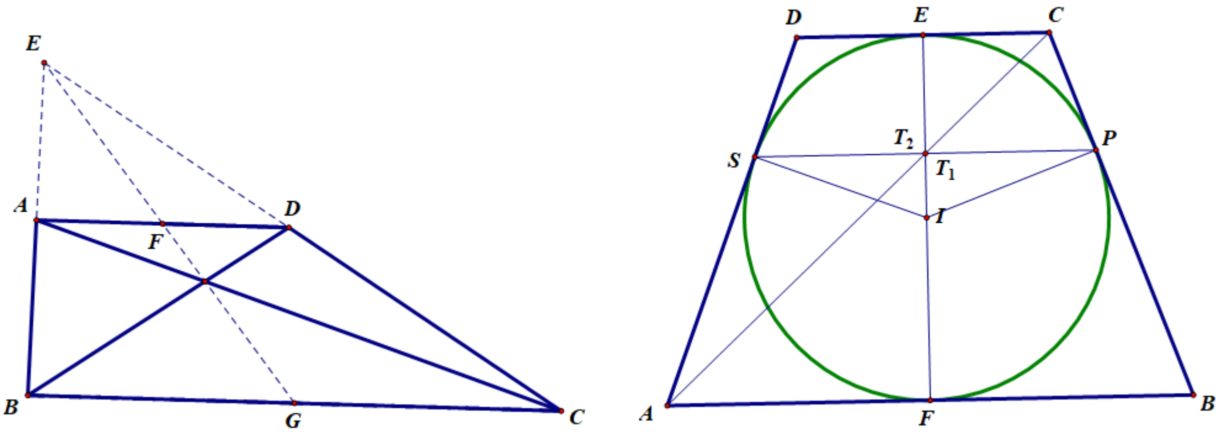


Рис. 15:

Доказательство 2) также использует несколько подобий.

Приведу дополнительно примеры задач на подобие, которые полезно повторять в различные периоды изучения курса геометрии. Эти задачи даны в виде рисунков.

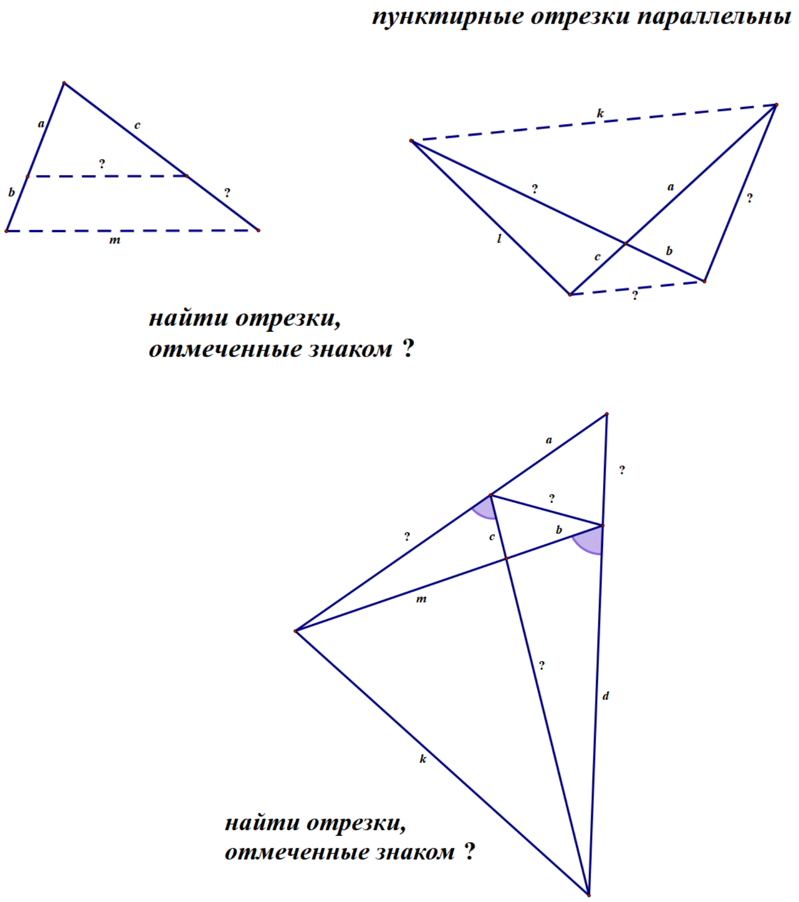


Рис. 16:

Лемма о пресекающихся хордах окружности.

Утверждение. *Пусть в окружности проведены хорды* AB *и* CD*, которые пресекаются в точке* P*. Тогда* $AP{\cdot}PB = CP{\cdot}DP$*. Причём это равенство сохраняется для любых хордах, проходящих через точку* P*. Более того, если точка* P *лежит вне круга, ограниченного данной окружностью, а продолжения хорд пересекаются в этой точке* P*, то указанное равенство сохраняется. Величина произведения отрезков хорд зависит только от радиуса окружности и расстояния точки* P *от центра* O *данной окружности.*

$$\triangle APD \sim \triangle CPB \Rightarrow \frac{AP}{CP} = \frac{DP}{BP} \Rightarrow AP \cdot BP = CP \cdot DP = PM \cdot PN = |OP^2 - R^2|$$

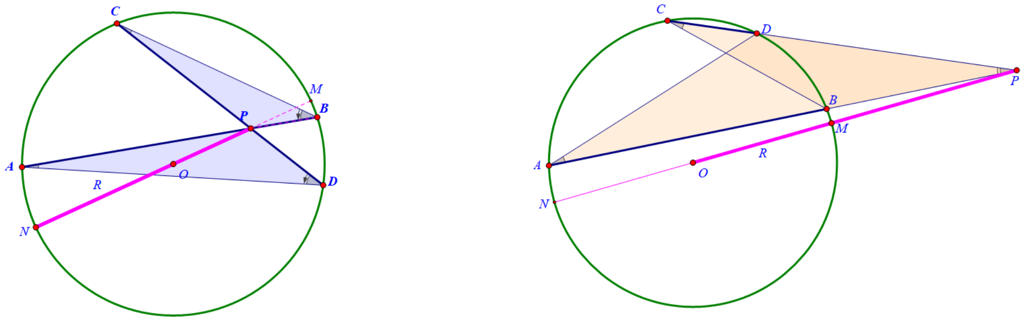


Рис. 17:

Дополнительные конструкции.

Задача 1.13. Две окружности пересекаются в точке A и B. В каждой из этих окружностей проведены хорды AC и AD так, что хорда одной окружности касается другой окружности.

Найдите AB, если $CB = c, BD = d$.

Задача 1.14. В треугольнике ABC точка O — центр описанной окружности. Через точки B и C проведены прямые, перпендикулярные прямой AO и пересекающие AC и AB в точках K и M соответственно, причём $BK = a; CM = b$. Найдите BC.

Задача 1.15. Две окружности касаются друг друга внутренним образом в точке A. Хорда BC большей окружности касается меньшей окружности в точке D. Прямая AD вторично пересекает большую окружность в точке M. Найдите BM, если $AM = a, DM = b$.

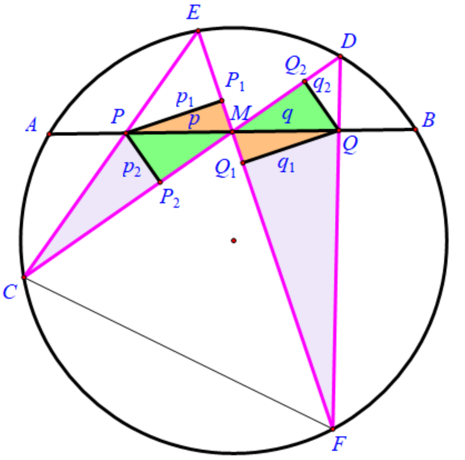
Задача 1.16. В треугольнике ABC через вершину A проведена прямая k, касающаяся описанной окружности данного треугольника. Найдите высоту AA_1 этого треугольника, если точки B и C удалены от прямой k на расстояния a и b.

Задача 1.17. Серединные перпендикуляры сторон AB и AC треугольника ABC пересекают высоту, проведённую из вершины A, в точках K и M, причём $AK = a, AM = b$. Найдите радиус описанной окружности треугольника ABC.

Задача 1.18. В окружности ω_1 проведён диаметр AB. Окружность ω_2 с центром в точке B пересекает ω_1 в точках C и D. На меньшей дуге BC отмечена точка M и хорда AM окружности ω_1 пересекает ω_2 в точке E. Известно, что $CM = a, DM = b$. Найдите EM.

Теорема о бабочке.

Утверждение. *Пусть в окружности проведена хорда* AB *и* M *— её середина. Пусть* CD *и* EF *— хорды данной окружности, проходящие через точку* M*. Пусть точки* E *и* D *лежат в одной полуплоскости относительно прямо* AB *и* EC *пересекает* AB *в точке* P*, а* DF *пересекает* AB *в точке* Q*. Тогда* $p = PM = QM = q$*.*



Рассмотрите четыре подобия и докажите, что $p = q$.

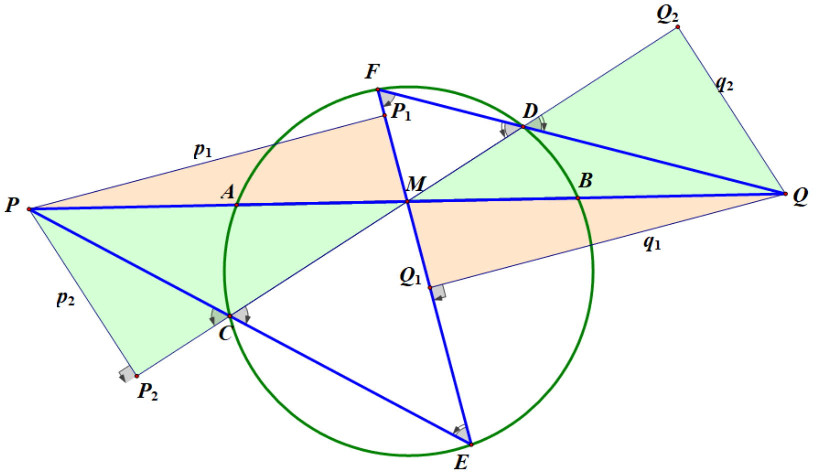


Рис. 18:

$$\triangle PMP_1 \sim \triangle QMQ_1; \triangle PMP_2 \sim \triangle QMQ_2; \triangle PCP_2 \sim \triangle QFQ_1; \triangle PEP_1 \sim \triangle QDQ_2.$$

Задача о пятиугольнике. В пятиугольнике $ABCDE$ отмечены середины A_1, B_1, C_1, D_1 его сторон AB, BC, CD, DE соответственно и середины P, Q отрезков A_1C_1 и B_1D_1 соответственно. Найдите отношение $AE : PQ$.

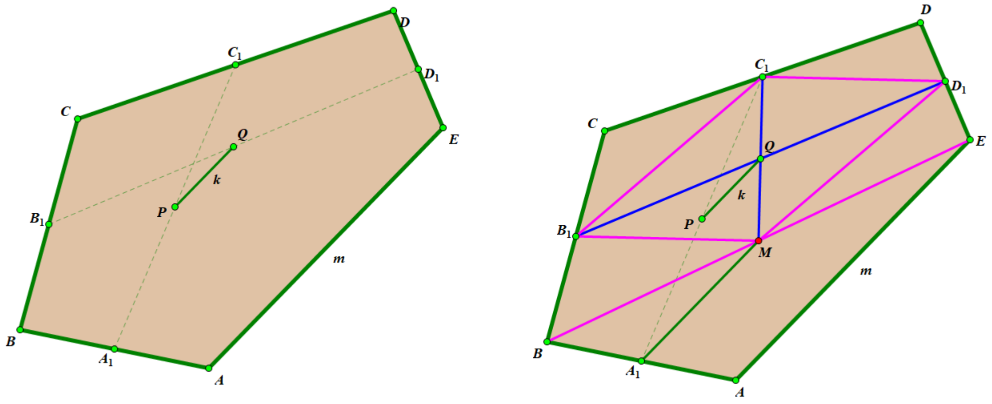


Рис. 19:

Попробуйте решить задачу, закрыв правый рисунок, зная, что нужно использовать только свойство средней линии треугольника.

Я описываю решение.

В четырёхугольнике $BCDE$ проведём сторону BE и отметим точку M её середину. Тогда по свойству средней линии треугольника $B_1C_1D_1M$ параллелограмм (параллелограмм Вариньона). Следовательно, середина Q его диагонали B_1D_1 является и серединой диагонали CM.

Отсюда следует, что в треугольнике A_1C_1M отрезок $PQ = k$ средняя линия и, значит, $A_1M = 2k$.

И теперь, мы видим, что в треугольнике ABE отрезок A_1M — средняя линия, параллельная стороне AE, и поэтому $AE = m = 2A_1M = 4k$.

Следовательно, искомое отношение $AE : PQ = 4$.