Отношение площадей.

Площадь S плоской фигуры f есть положительное число: $S_f > 0$, обладающая следующее свойствами:

1) если $f \bigcup g = F$; $f \bigcap g = \oslash$,кроме граничных точек, то $S_f + S_g = S_F$

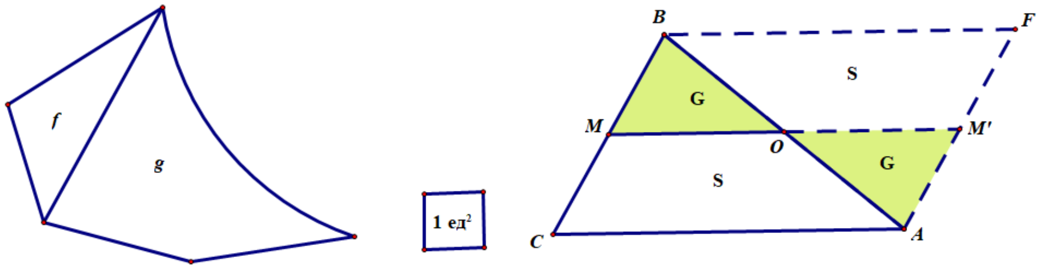

Рис. 1:

2) если $f = g$, то $S_f = S_g$ и если $S_f = S_g$, то фигуры f и g могут быть не равны.
3) площадь единичного квадрата (сторона квадрата 1 ед. длины) равна 1ед^2.

Задача 1.1. Найдите площадь F фигуры, если сторона клетки равна 1 см.

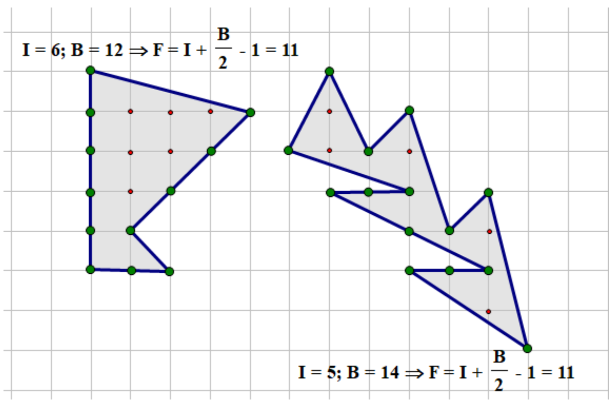

Рис. 2:

Здесь приведена удивительная *формула Пика*, для площади F многоугольника с вершинами в узлах координатной сетки:

$$F = I + \frac{B}{2} - 1,$$

где I — количество внутренних(interior) узлов, B — количество граничных(boundary) узлов.

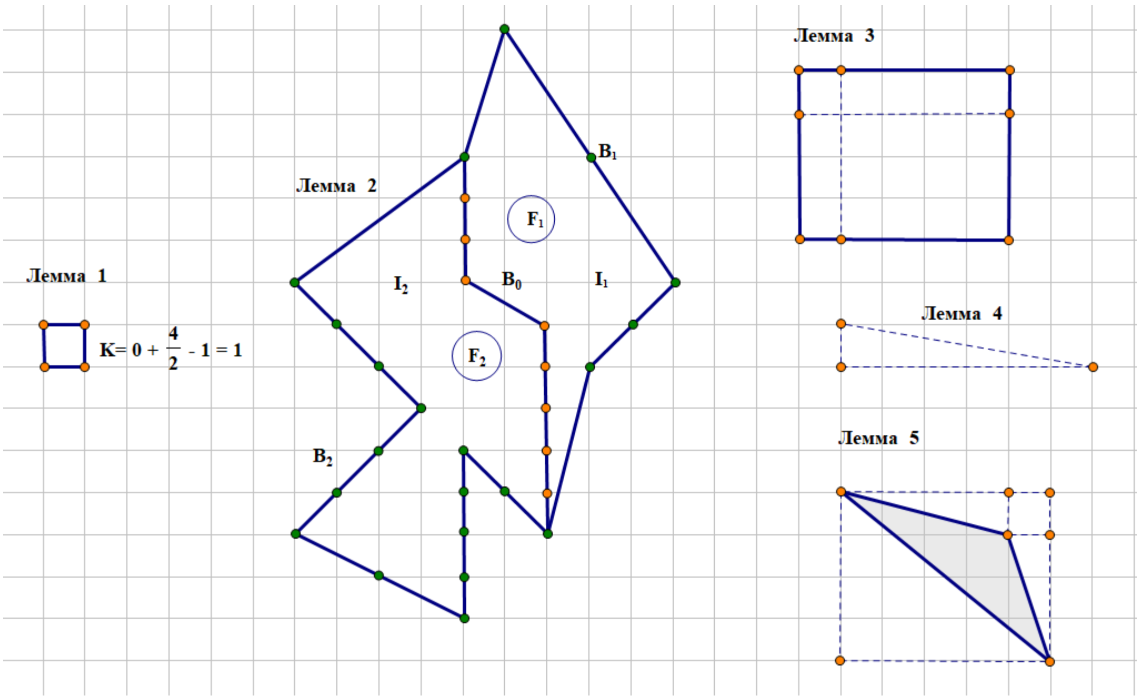

Рис. 3:

Доказательство этой формулы состоит из пяти вспомогательных лемм, каждая из которых утверждает справедливость формулы Пика для некоторого многоугольника с вершинами в узлах координатной сетки.

Лемма 1.

Для единичного квадрата формула Пика верна. Проверяем.

Лемма 2.

Если фигуры F_1, F_2 имеют общую границу B_0 и для каждой из них формула Пика верна, то и для данной фигуры $F = F_1 \bigcup F_2$ формула Пика верна.

Доказательство. Пусть формула Пика верна для F_1 и F_2, то есть верны равенства

$$F_1 = I_1 + \frac{B_1}{2} - 1; F_2 = I_2 + \frac{B_2}{2} - 1.$$

Проверим, верно ли равенство

$$F = I + \frac{B}{2} - 1.$$

Для этого найдём количество I внутренних точек для фигуры $F = F_1 \bigcup F_2$. Это количество является суммой всех I_1 внутренних точек F_1, всех I_2 внутренних точек F_2 и количества B_0 точек на границе. Итого получаем

$$I = I_1 + I_2 + B_0.$$

Теперь найдём число B граничных точек фигуры $F = F_1 \bigcup F_2$. Это число является суммой всех B_1 граничных точек F_1 без числа B_0 и всех B_2 граничных точек F_2 без суммы $B_0 + 2$. Итого получаем

$$B = B_1 - B_0 + B_2 - (B_0 + 2) = B_1 + B_2 - 2B_0 - 2.$$

Подставим в формулу Пика:

$$F = I + \frac{B}{2} - 1 = I_1 + I_2 + B_0 + \frac{B_1 + B_2 - 2B_0 - 2}{2} - 1 = \left(I_1 + \frac{B_1}{2} - 1\right) + \left(I_2 + \frac{B_2}{2} - 1\right) = F_1 + F_2.$$

Лемма 2 доказана.

Далее, ***леммы 3-5.*** следуют последовательным применением ***леммы 1.*** и ***леммы 2.***.

Так ***лемма 3.*** для «одноэтажного» прямоугольника верна по индукции. Сначала, используя лемму 1, можем увидеть справедливость формулы Пика для «одноэтажного» прямоугольника из двух единичных квадратов, поскольку верна ***лемма 2.***, затем получаем справедливость формулы Пика для «одноэтажного» прямоугольника из трёх, четырёх и т.д. квадратов.

Аналогичным образом устанавливаем справедливость ***леммы 4.*** для «одноэтажного» треугольника. Действительно, «одноэтажный» прямоугольник из леммы 3 имеет 0 внутренних точек и $2k + 4$ граничных точек, где k число точек на длинной стороне «одноэтажного» прямоугольника, не считая четырёх его вершин. Кроме того, этот «одноэтажный» прямоугольник состоит из двух равных треугольников, каждый из которых имеет нулевое число внутренних точек и одинаковое число $k+3$ точек на границах.

Для «одноэтажного» прямоугольника формула Пика верна по ***лемме 3.***и даёт результат $k + 1$. Проверим, что и для площади T «одноэтажного» треугольника формула Пика верна.

Имеем $T = 0 + \frac{k+3}{2} - 1$. Поэтому

$$2T = 2\left(0 + \frac{k+3}{2} - 1\right) = k + 1.$$

То есть ***лемма 4.*** верна. ***Лемму 5.*** докажите самостоятельно, используя рисунок.

Если вершины прямоугольника не лежат в вершинах координатной сетки, то можно доказать, что площадь S прямоугольника равна произведению длин a и b двух его соседних сторон:

$$S = ab.$$

Отсюда следуют формулы для треугольника, параллелограмма и трапеции. Полезно вывести следующие формулы

$$S_\triangle = \frac{1}{2}ah_a = \frac{1}{2}bh_b = \frac{1}{2}bh_b; \quad S_\triangle = \frac{1}{2}ab\sin C \quad S_\triangle = rp; \quad S_\triangle = 2R^2 \sin A \sin B \sin C.$$

А также формулу Герона и формулу Брахмагупты для вписанного четырёхугольника.

$$S_\triangle = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}; \quad S_4 = \sqrt{(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)}.$$

Доказательство последних двух формул использует теорему косинусов и поэтому возможно только в 9-м классе, если это не математический класс (см.рис.).

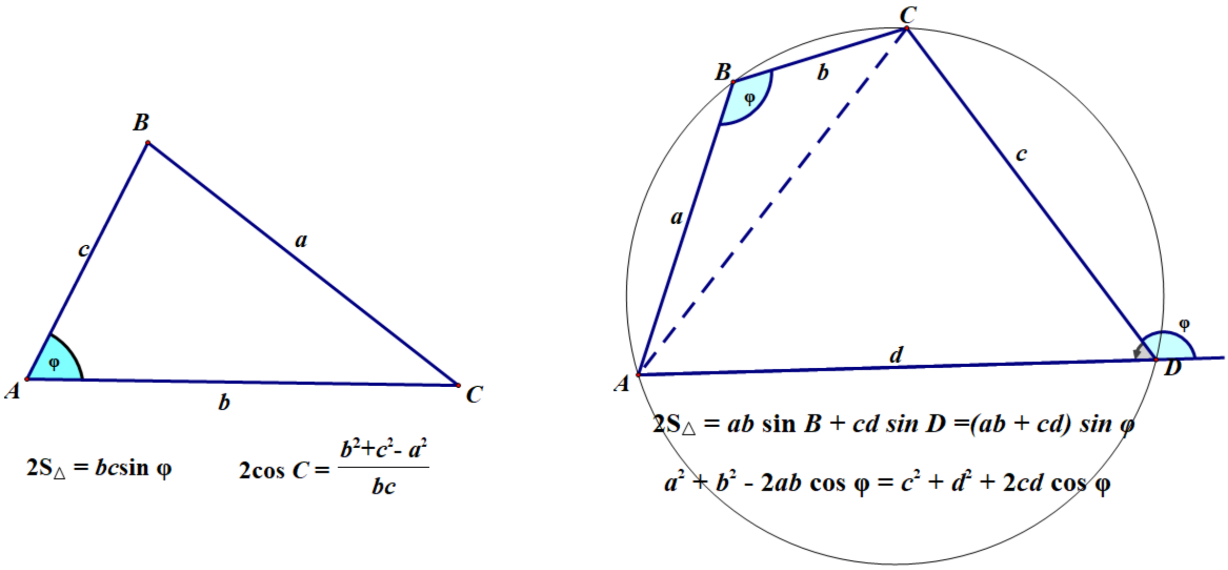

Рис. 4:

Указание. Выразите $\sin\varphi$ через $\cos\varphi$ и подставьте полученное значение в формулу площади. В случае формулы Герона получаем

$$4b^2c^2\sin^2\varphi = 4b^2c^2 - (b^2+c^2-a^2)^2 = (a+b+c)(b+c-a)(a+c-b)(a+b-c) = 4p(p-a)(p-b)(p-c).$$

В случае формулы Брахмагупты получаем

$$(a^2+b^2-c^2-d^2)^2 = 4(ab+cd)^2\cos^2\varphi = 4(ab+cd)^2(1-\sin^2\varphi) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 4(ab+cd)^2\sin^2\varphi =$$

$$= 4(ab+cd)^2-(a^2+b^2-c^2-d^2)^2 = 16(b+c+d-a)(a+c+d-b)(a+b+d-c)(a+b+c-d).$$

Площади треугольников, имеющих общую высоту (основание).

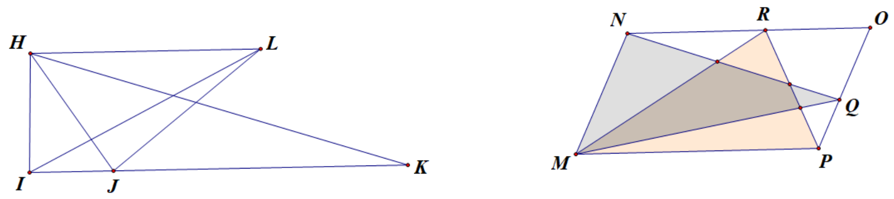

Рис. 5:

Вы видите, что треугольники HIJ и LIJ (см.левый рис.) имеют общее основание IJ и одну и ту же высоту, равную расстоянию между параллельными прямыми HL и IJ. Следовательно их площади равны:

$$S_{HIJ} = S_{LIJ} \Rightarrow S_{HIO} = S_{LJO},$$

где O — точка пересечение отрезков HJ и LI (на рисунке точка O не обозначена.

На этом же рисунке замечаем, что отношение

$$S_{HIJ} : S_{HJK} = IJ : JK$$

поскольку эти треугольники имеют общую высоту из вершины H.

Рассмотрим рис.5 справа. Несложно понять, что треугольники MNQ и MRP расположенные в параллелограмме $MNOP$ равновелики, то есть

$$S_{MNQ} = S_{MRP},$$

причём $S_{MNQ} = S_{MRP} = 0,5S_{MNOP}$. Это следует из формул для площади треугольника и параллелограмма.

Кроме того, из полученного равенства $S_{MNQ} = S_{MRP} = 0,5S_{MNOP}$ следует, что

$$S_{MNQ} + S_{MRP} = S_{MNOP}.$$

Это означает, что площадь параллелограмма, покрытая дважды равна непокрытой площади. Можно сказать, что тёмная на рисунке части площади параллелограмма равна светлой части площади этого параллелограмма, потому, что сумма площадей треугольников равна площади параллелограмма.

Если это рассуждение кажется неубедительным, то можно рассуждать формально, соответственно обозначив части площади параллелограмма буквами a, b, c, d, e, g, i, j.

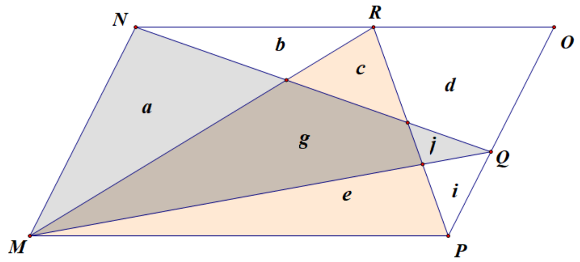

Рис. 6:

Сначала заметим, что справедливы равенства:

$$a + g + j = c + g + e = b + c + d + e + i = 0,5S_{MNOP} = a + b + d + j + i.$$

Отсюда следует, что $a + (b + d + j) + i = c + e + (b + d + j) = c + g + e$, откуда $b + d + j = g$, что и требовалось.

Установленный факт часто формулируют в виде ***теоремы о линолеуме:***

Если сумма площадей двух равновеликих фигур равна площади фигуры, которая покрыта данными двумя равновеликими фигурами, то площадь непокрытой части равна площади, покрытой дважды.

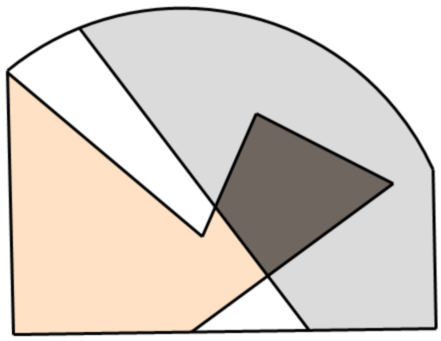

Рис. 7:

Вы видите на рис.7 большую криволинейную фигуру G, внутри которой расположены две равные по площади фигуры, сумма площадей которых равна площади фигуры G. Оказалось, что некоторая часть G совсем не покрыта, а другая — покрыта дважды. Теорема о линолеуме утверждает, что площадь непокрытой части G равна части площади G, покрытой дважды.

Задача 1.2. Докажите, что медианы треугольника делят его площадь на шесть равновеликих треугольников.

Доказательство.

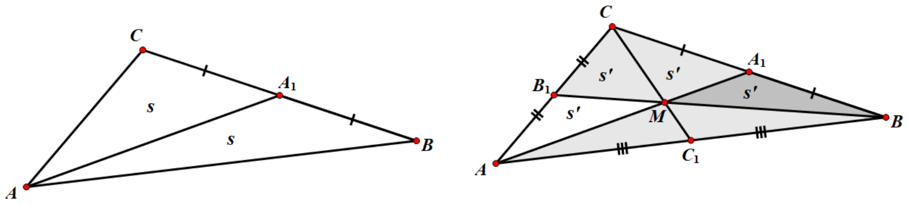

Рис. 8:

На левом рисунке 8 замечаем, что $CA_1 = BA_1$ и, значит,

$$S_{AA_1C} = S_{AA_1B} = s.$$

Следовательно, *медиана делит треугольник на два равновеликих треугольника*.

Посмотрим на правый рисунок 8. Поскольку $S_{CMA_1} = S_{BMA_1} = s'$ по доказанному, $S_{CBB_1} = S_{ABA_1} = 0,5S_{ABC}$, то по теореме о линолеуме $S_{AMB_1} = S_{BMA_1} = s'$ и поэтому $S_{CMB_1} = s'$.

Аналогично, используя допустимые покрытия треугольника ABC треугольниками ACC_1 и ABA_1 находим, что $S_{AMC_1} = S_{CMA_1} = s'$ и, значит, $S_{BMC_1} = S_{AMC_1} = s'$.

Следовательно, все шесть площадей равны между собой, что и требовалось.

Задача 1.3. В треугольнике ABC чевианы AA_1, CC_1 таковы, что $CA_1 : A_1B = 5 : 4 = \alpha$; $AC_1 : C_1B = 5 : 7 = \beta$. Найдите отношение площади каждой из четырёх образовавшихся фигур к площади треугольника ABC.

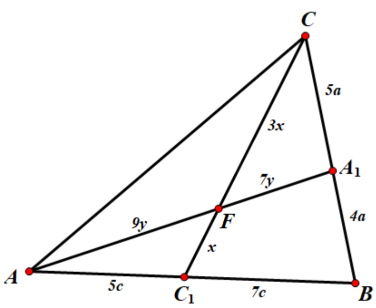

Рис. 9:

Решение. 1)Отметим на рисунке условия задачи:

$$AC_1 = 5c; BC_1 = 7c; BA_1 = 4a; CA_1 = 5a.$$

2) По теореме Менелая в треугольнике ABA_1 и секущей $C - F - C_1$ напишем равенство

$$\frac{AF}{FA_1}\cdot\frac{A_1C}{CB}\cdot\frac{BC_1}{C_1A}=1 \Rightarrow \frac{AF}{FA_1}\cdot\frac{5a}{9a}\cdot\frac{7c}{5c}=1 \Leftrightarrow \frac{AF}{FA_1}=\frac{9}{7}.$$

Аналогично, $\dfrac{CF}{FC_1}=\dfrac{3}{1}$.

3) Пусть $S_{ABC}=1$. Тогда

$$S_{ACC_1}=\frac{5}{12};\quad S_{BCC_1}=\frac{7}{12};\quad S_{ACA_1}=\frac{5}{9};\quad S_{ABA_1}=\frac{4}{9}.$$

4)Теперь окончательно находим

$$S_{AFC_1}=\frac{1}{4}S_{ACC_1}=\frac{5}{48}; S_{AFC}=\frac{1}{4}S_{ACC_1}=\frac{5}{16}; S_{CFA_1}=\frac{7}{16}S_{ACA_1}=\frac{35}{144}.$$

$$S_{FA_1BC_1}=S_{ABA_1}-S_{AFC_1}=\frac{49}{144}.$$

Задача 1.4. В треугольнике ABC чевианы $AA_1, CC_{1,2}$ таковы, что $CA_1 : A_1B = 2 : 3 = \alpha; AC_1 : C_1B = 1 : 5 = \beta; AC_2 : C_2B = 2 : 1 = \gamma$. Найдите отношение площади FGC_2C_1 к площади треугольника ABC.

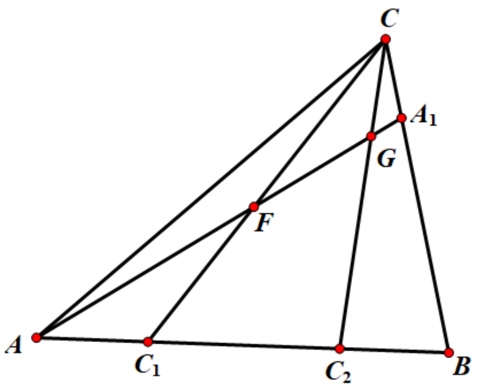

Рис. 10:

Площади треугольников, имеющих общий угол.

Бывает полезно использовать формулы площади треугольника через синусы его углов:

$$S_{\triangle}=0,5ab\sin C=0,5ac\sin B=0,5bc\sin A.$$

Из этой формулы следует такой замечательный факт:

если два треугольника имеют общий угол (два смежных между собой угла), то отношение площадей этих треугольников равно отношению произведений сторон, заключающих этот общий угол (эти смежные углы):

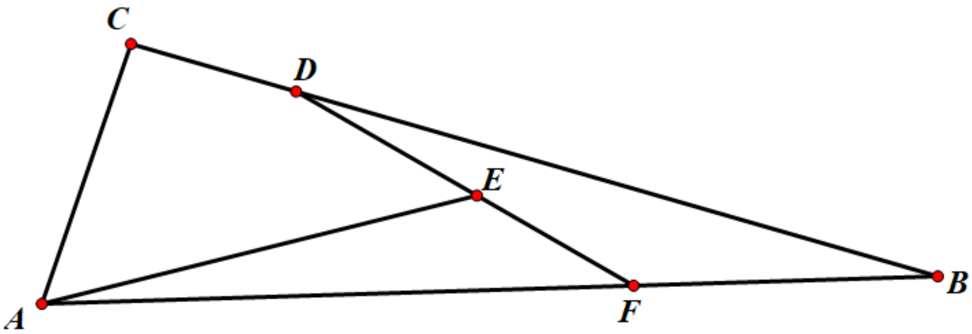

Рис. 11:

Например, на рисунке 11 треугольники ABC и FBD имеют общий угол ABC, а в треугольниках AFE и BFD углы AFE и BFD — смежные.

В первом случае имеем

$$\frac{S_{ABC}}{S_{FBD}} = \frac{0,5AB \cdot BC \sin B}{0,5FB \cdot BD \sin B} = \frac{AB \cdot BC}{FB \cdot BD}.$$

Во втором случае имеем

$$\frac{S_{AFE}}{S_{BFD}} = \frac{0,5AF \cdot FE \sin \widehat{AFE}}{0,5FB \cdot FD \sin \widehat{BFD}} = \frac{AF \cdot FE}{FB \cdot FD},$$

поскольку по формулам приведения (или из определения синусов смежных углов) следует, что

$$\widehat{AFE} + \widehat{BFD} = 180^\circ \Rightarrow \sin \widehat{AFE} = \sin \widehat{BFD}.$$

Рассмотрим, классический пример — задачу Архимеда (рис.12).

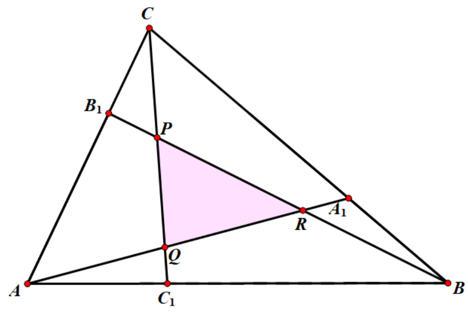

Рис. 12:

Каждая сторона треугольника ABC разделена на три равные части и вершины A, B, C соединены с точками A_1, B_1, C_1 на сторонах так как на рисунке:

$$BA_1 : BC = CB_1 : CA = AC_1 : AB = 1 : 3 = \alpha.$$

Докажем, что

$$S_{PQR} = \frac{1}{7} S_{ABC}.$$

Будем считать, что $S_{ABC} = 1$.

Тогда по теореме Менелая для треугольника CAC_1 и секущей $B_1 - P - B$ имеем равенство

$$\frac{CB_1}{B_1A} \cdot \frac{AB}{BC_1} \cdot \frac{C_1P}{PC} = 1 \Leftrightarrow \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{C_1P}{PC} = 1 \Rightarrow \frac{C_1P}{PC} = \frac{4}{3}.$$

Аналогично из соответствующих треугольников найдём

$$\frac{A_1Q}{QA} = \frac{B_1R}{RB} = \frac{C_1P}{PC} = \frac{4}{3}.$$

Теперь по теореме Менелая для треугольника CBC_1 и секущей $A_1 - Q - A$ имеем равенство

$$\frac{CA_1}{A_1B} \cdot \frac{BA}{AC_1} \cdot \frac{C_1Q}{QC} = 1 \Leftrightarrow \frac{2}{1} \cdot \frac{3}{1} \cdot \frac{C_1Q}{QC} = 1 \Rightarrow \frac{C_1Q}{QC} = \frac{1}{6}.$$

И, значит,

$$\frac{A_1R}{RA} = \frac{B_1P}{PB} = \frac{C_1Q}{QC} = \frac{1}{6}.$$

Следовательно, внутренние точки P, Q, R делят соответствующие чевианы в отношении

$$C_1P : PQ : QC_1 = A_1Q : QR : RA_1 = BR : RP : PB_1 = 3 : 3 : 1 = \alpha : (1-2\alpha) : \alpha^2.$$

Всё подготовлено к получению окончательного результата.

Заметим, что площади треугольников AQC_1, BRA_1, CPB_1 одинаковы и отношение каждой из этой площади к площади треугольника ACC_1 найдём по соответствующей теореме:

$$\frac{S_{AQC_1}}{S_{ABA_1}} = \frac{AQ \cdot AC_1}{AA_1 \cdot AB} = \frac{3}{7} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{7}.$$

Следовательно,

$$S_{AQC_1} = \frac{1}{7} \cdot S_{ABA_1} = \frac{1}{21} = \frac{\alpha^3}{1-\alpha+\alpha^2}.$$

Отсюда получаем, что

$$S_{BRQC_1} = S_{ABA_1} - S_{AQC_1} - S_{BRA_1} = \frac{1}{3} - 2\frac{1}{21} = \frac{5}{21} = \frac{\alpha-\alpha^2-\alpha^3}{1-\alpha+\alpha^2}.$$

И теперь окончательно находим

$$S_{PQR} = S_{ABC} - 3S_{AQC_1} - 3S_{BRQC_1} = 1 - 3 \cdot \frac{1}{21} - 3 \cdot \frac{5}{21} = \frac{1}{7}.$$