ЭКОНОМИЧЕСКАЯ

ЗАДАЧА

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

БАНКОВСКАЯ ЗАДАЧА

ОПИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР

ВКЛАДЫ

КРЕДИТЫ

Кредиты, в которых известна схема, по которой будут производиться выплаты

Кредиты , где долг перед банком погашается несколькими равными платежами

Кредиты с равным уменьшением долга

Аннуитетные платежи

Дифференцированные платежи

Банковская задача

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Алгебра, 7 класс, учебник для классов с углубленным изучением математики (авторы Ю.М.Макарычев, Н.Г. Миндюк, К.И. Нешков, И.Е. Феоктистов)

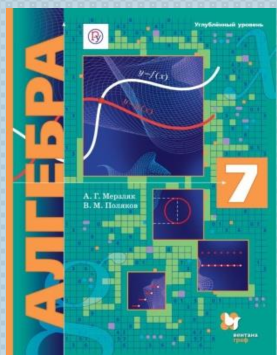
№ 582

Банк выплачивает доход из расчета 6% годовых. Положив в банк некоторую сумму, вкладчик получил через год 3180 рублей. Какая сумма была положена в банк?

№ 583

Какую сумму нужно положить в банк, дающий доход из расчета 8 % годовых, чтобы через год получить 4860 р.?

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ



Алгебра, 7 класс, учебник для углубленного изучения алгебры (авторы А.Г. Мерзляк, В.М.Поляков)

№ 3.21

Клиент положил в банк 300 000 рублей на два различных вклада, причем по одному вкладу ему насчитывали 7% годовых, а по другому – 8 % годовых. Через год он получил 22 200 рублей прибыли. Какая сумма была внесена на каждый из вкладов?

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА В СРЕДНЕЙ ШКОЛЕ

Задача из материалов, рекомендованных для изучения в курсе алгебры 7 класса (проект «Математическая вертикаль»)

Задача 86. Банк в конце каждого года увеличивает вклад в $4/3$ раза, а в середине года вкладчик снимает 5000 рублей. На какую сумму был открыт вклад, если к концу второго года сумма выросла на 50% по сравнению с изначальным значением?

ВВЕДЕНИЕ КОЭФФИЦИЕНТА УВЕЛИЧЕНИЯ

Сумма, которая будет на счету вкладчика через год:

$$S_1 = S\left(1 + \frac{r}{100}\right)$$

Обозначим $K = 1 + \frac{r}{100}$

Назовем к – коэффициент увеличения вклада

Тогда сумма, которая будет на счету вкладчика через год:

$$S_1 = SK$$

Введение коэффициента увеличения в средней школе

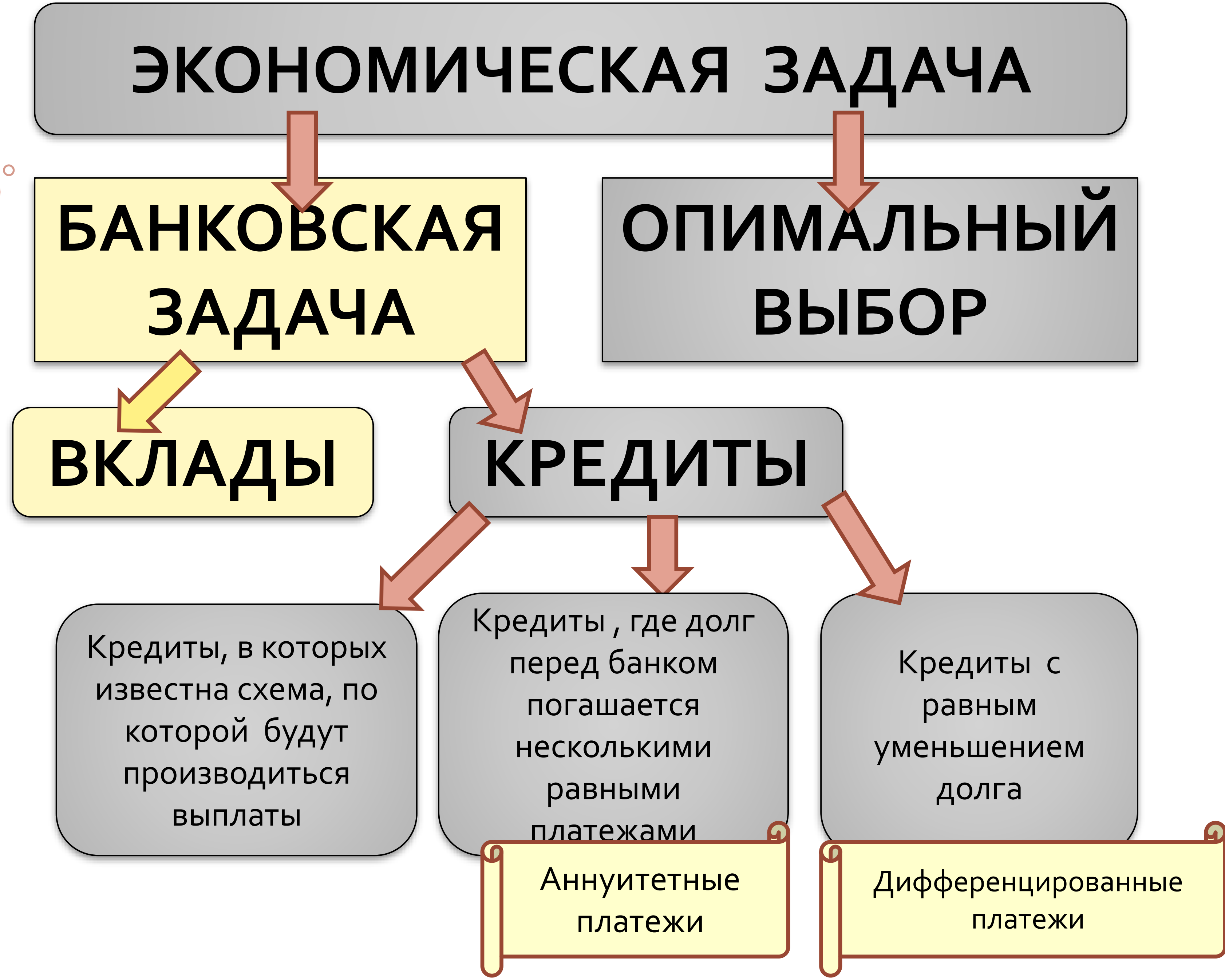
Алгебра, 7 класс, учебник для классов с углубленным изучением математики (авторы Ю.М.Макарычев, Н.Г. Мендюк, К.И. Нешков)

№ 496

Три фирмы получили от завода-производителя 236 компьютеров. Вторая фирма получила на 10 % больше компьютеров, чем первая, а третья на 100 компьютеров меньше, чем первые две вместе. Сколько компьютеров получила каждая фирма?

Обратим внимание:

увеличение на 10 % соответствует увеличению в 1,1 раза


ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА
БАНКОВСКАЯ ЗАДАЧА
ОПИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР
ВКЛАДЫ
КРЕДИТЫ
Кредиты, в которых известна схема, по которой будут производиться выплаты
Кредиты , где долг перед банком погашается несколькими равными платежами
Кредиты с равным уменьшением долга
Аннуитетные платежи
Дифференцированные платежи

ВКЛАДЫ

Решите задачу. В банк положена сумма 640 000 рублей под 12,5 % годовых. Найти, какую сумму получит вкладчик через 3 года, если операции по вкладу не производились

s =

r % =

k =

n =

n (год)	Сумма после начисления процентов (руб.)	Операции по вкладу (руб.)	Сумма после операций (руб.)
0			
1			
2			
3			

<u>Решите задачу</u>. В банк положена сумма 640 000 рублей под 12,5 % годовых. Найти, какую сумму получит вкладчик через 3 года, если операции по вкладу не производились

S = 640 000 руб.

r% = 12, 5%

k = 1 + 0,125 = 1,125 = $1 + \frac{1}{8} = \frac{9}{8}$

n = 3 года

n (год)	Сумма после начисления процентов (руб.)	Операции по вкладу (руб.)	Сумма после операций (руб.)
0			**S**
1	**Sk**	**0**	**Sk**
2	**Sk^2**	**0**	**Sk^2**
3	**Sk^3**	**0**	**Sk^3**

$S_3 = S\,k^3$

$S_3 = \frac{640\,000 \cdot 9^3}{8^3}$ = 911 250 рублей.

Ответ: 911 250 руб.

Задача. Вкладчик положил в банк сумму 200 000 рублей под 25 % годовых. В первый год хранения вклада после начисления процентов вкладчиком была снята сумма 10 000 рублей, а еще через год он вернул эту сумму. Какую сумму получит вкладчик в конце третьего года хранения вклада.

S =

r %=

k =

n =

n (год)	Сумма после начисления процентов (руб.)	Операции по вкладу (руб.)	Сумма после операций (руб.)
0			
1			
2			
3			

Задача. Вкладчик положил в банк сумму 200 000 рублей под 25 % годовых. В первый год хранения вклада после начисления процентов вкладчиком была снята сумма 10 000 рублей, а еще через год он вернул эту сумму. Какую сумму получит вкладчик в конце третьего года хранения вклада.

S = 200 000 руб.

r% = 25%

k = 1 + 0,25 = 1,25 = $1 + \frac{1}{4} = \frac{5}{4}$

n = 3 года

n (год)	Сумма после начисления процентов (руб.)	Операции по вкладу (руб.)	Сумма после операций (руб.)
0			**S**
1	**Sk**	**- 10 000**	**Sk-10 000**
2	**(Sk-10 000) k =** **= Sk^2-10 000k**	**+ 10 000**	**Sk^{2-} - 10 000k+10 000**
3	**Sk^3- 10 000k^2+10 000k**	**0**	**Sk^3- 10 000k^2+10 000k**

S_3 =Sk^3- 10 000k^2+10 000k

$$S_3 = \frac{200000 \cdot 5^3}{4^3} - \frac{10000 \cdot 5^2}{4^2} + \frac{10000 \cdot 5}{4} = 390625 - 15625 + 12500 = 387500 \text{ рублей.}$$

Ответ: 387 500 руб.

НОВЫЕ ЗАДАЧИ НА ВКЛАДЫ

Задача. По вкладу «А» банк в конце каждого года увеличивает на 10% сумму, имеющуюся на вкладе в начале года, а по вкладу «Б» — увеличивает эту сумму на 11% в течение каждого из первых двух лет. Найдите наибольшее натуральное число процентов, начисленное за третий год по вкладу «Б», при котором за все три года этот вклад будет менее выгоден, чем вклад «А».

НОВЫЕ ЗАДАЧИ НА ВКЛАДЫ

Банк А

S' - сумма кредита

$r\% = 10\%$

$k = 1,1$

$n = 3$ года

Сумма на вкладе через 3 года:

$S' \cdot k^3$

Банк Б

S' - сумма кредит

$r_1\% = 11\%$

$k_1 = 1,11$

$n = 2$ года

Сумма на вкладе через 2 года:

$S_2 = S' \cdot k_1^2$

$r_2\%$ - ? $(r_2 \in Z)$

$k_2 = 1 + \frac{r_2}{100}$

Сумма через 3 года:

$S'_3 = S'_2 \cdot k_2$

$S'_3 = S' \cdot k_1^2 \cdot k_2$

По условию задачи:

$S' k^3 > S' \cdot k_1^2 k_2$

$k^3 > k_1^2 \cdot k_2$

$1,1^3 > 1,11^2 \cdot k_2$

$1,331 > 1,2321 \cdot k_2$

$k_2 < \frac{13310}{12321}$

$k_2 < 1\frac{989}{12321}$

$1 + \frac{r_2}{100} < 1\frac{989}{12321}$

$r_2 < \frac{98900}{12321}$

$r_2 < 8\frac{332}{12321}$

$r_2 = 8$

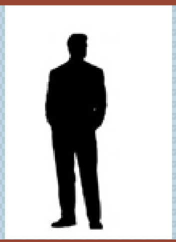
Ответ: 8 %

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

- **БАНКОВСКАЯ ЗАДАЧА**
  - **ВКЛАДЫ**
  - **КРЕДИТЫ**
    - Кредиты, в которых известна схема, по которой будут производиться выплаты
    - Кредиты , где долг перед банком погашается несколькими равными платежами
      - Аннуитетные платежи
    - Кредиты с равным уменьшением долга
      - Дифференцированные платежи
- **ОПИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР**

КРЕДИТЫ

Заемщик

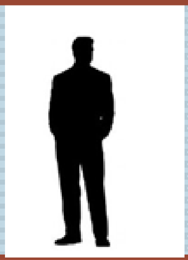


Берет кредит

Банк

Начисляет проценты по кредиту

Заемщик



Выплачивает долг (часть долга)

Через год

После начисления %

<u>При решение задач на кредиты полезно оформить таблицу:</u>

n (год)	Сумма после начисления процентов (руб.)	Выплаты (руб.)	Сумма после выплат (руб.)

Задача. В банке взят кредит 1 миллион рублей под 10 % годовых. Найдите, за какое минимальное количество лет можно расплатиться с банком, и сумму выплат при условии, что выплаты не должны превышать 200 000 рублей.

Обратим внимание: для того чтобы минимизировать количество лет, за которые долг будет погашен, нужно максимизировать выплаты, значит, первые выплаты должны быть равны 200 000 руб.

S = 1 000 000 руб.
r% = 10 %
k = 1 + 0,1= 1,1
n = n лет

Решите задачу, продолжив заполнение таблицы.

S (руб) / n (год)	Сумма после начисления процентов (руб.)	Выплаты (руб.)	Сумма после выплат (руб.)
0			1 000 000
1	1000 000 · 1,1 = 1 100 000	200 000	1 100 000 – 200 000 = 900 000
2		200 000	
…	…	…	…

S = 1 000 000 руб.
r%= 10 %
k = 1 + 0,1= 1,1
n = n лет

n (год)	Сумма после начисления процентов (руб.)	Выплаты (руб.)	Сумма после выплаты (руб.)
0			1 000 000
1	1000 000 · 1,1 = 1 100 000	200 000	1 100 000 - 200 000 = 900 000
2	900 000 · 1,1 = 990 000	200 000	790 000
3	869 000	200 000	669 000
4	735 900	200 000	535 900
5	589 490	200 000	389 490
6	428 439	200 000	228 439
7	251 282,9	200 000	51 282,9
8	56 411,19	56 411,19	0

Сумма выплат: 200 000*7 + 56 411,19 = 1 456 411,19 рублей

n = 8 лет.

Ответ: n = 8 лет; сумма выплат равна 1 456 411,19 рублей

Задача (кредиты с известной схемой выплат)

15-го января планируется взять кредит в банке на 1 млн рублей на 6 месяцев. Условия его возврата таковы:

− 1-го числа каждого месяца долг возрастает на целое число *r* процентов по сравнению с концом предыдущего месяца;

− со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;

− 15-го числа каждого месяца долг должен составлять некоторую сумму в соответствии со следующей таблицей

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

Найдите наибольшее значение *r*, при котором общая сумма выплат будет составлять менее 1,2 млн рублей.

Для решения задачи заполним таблицу 2, используя данные таблицы 1:

Дата	15.01	15.02	15.03	15.04	15.05	15.06	15.07
Долг (в млн рублей)	1	0,6	0,4	0,3	0,2	0,1	0

S = 1 млн. руб.

r %= ?

k = 1 + $\dfrac{r}{100}$

n = 6 месяцев

Сумма выплат больше 1,2 млн. руб.

n (год)	Сумма после начисления процентов (млн. руб.)	Выплаты (млн. руб.)	Сумма после выплаты (млн. руб.)
0			1
1			0,6
2			0,4
3			0,3
4			0,2
5			0,1
6			0

Заполним таблицу, используя условия задачи:

n (год)	Сумма после начисления процентов (млн. руб.)	Выплаты (млн. руб.)	Сумма после выплаты (млн. руб.)
0			1
1	1 k	1 k – 0,6	0,6
2	0,6 k	0,6 k – 0,4	0,4
3	0,4 k	0,4 k – 0,3	0,3
4	0,3 k	0,3 k – 0,2	0,2
5	0,2 k	0,2 k – 0,1	0,1
6	0,1 k	0,1 k	0

Используя условие (общая сумма выплат будет составлять менее 1,2 млн рублей), составим и решим неравенство:

$k - 0{,}6 + 0{,}6\,k - 0{,}4 + 0{,}4\,k - 0{,}3 + 0{,}3\,k - 0{,}2 + 0{,}2\,k - 0{,}1 + 0{,}1\,k < 1{,}2$

$(1 + 0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1)\,k - (0{,}6 + 0{,}4 + 0{,}3 + 0{,}2 + 0{,}1) < 1{,}2$

$2{,}6\,k < 1{,}2 + 1{,}6$

$2{,}6\,k < 2{,}8$

$k < \frac{28}{26}$

$k < \frac{14}{13}$

так как $k = 1 + \frac{r}{100}$

$1 + \frac{r}{100} < \frac{14}{13}$

$\frac{r}{100} < \frac{1}{13}$

$r < \frac{100}{13}$

$r < 7\frac{9}{13}$ так как r – целое число, то r = 7

Ответ: 7 %.

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА

1 вариант

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на три года в размере S млн рублей, где S — **целое** число. Условия его возврата таковы:
− каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;
− с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга;
− в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}7S$	$0{,}4S$	0

Найдите наименьшее S, при котором каждая из выплат будет больше 5 млн рублей.

2 вариант

В июле 2016 года планируется взять кредит в банке на четыре года в размере S млн рублей, где S — целое число. Условия его возврата таковы:
— каждый январь долг увеличивается на 15% по сравнению с концом предыдущего года;
— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить часть долга;
— в июле каждого года долг должен составлять часть кредита в соответствии со следующей таблицей.

Месяц и год	Июль 2016	Июль 2017	Июль 2018	Июль 2019	Июль 2020
Долг (в млн рублей)	S	$0{,}8S$	$0{,}5S$	$0{,}1S$	0

Найдите наибольшее значение S, при котором общая сумма выплат будет меньше 50 млн рублей.

ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА

БАНКОВСКАЯ ЗАДАЧА

ОПИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР

ВКЛАДЫ

КРЕДИТЫ

Кредиты, в которых известна схема, по которой будут производиться выплаты

Кредиты , где долг перед банком погашается несколькими равными платежами

Аннуитетные платежи

Кредиты с равным уменьшением долга

Дифференцированные платежи

Задача. **В банке взят кредит S миллион рублей под r % годовых, выплатить который нужно за 4 года равными платежами.**

S – сумма кредита

r % - кредитная ставка

k = 1 + $\frac{r}{100}$

n = 4 года

n (год)	Сумма после начисления процентов (руб.)	Выплаты (руб.)	Сумма после выплат (руб.)
0			S
1	Sk	x	Sk - x
2	$(Sk-x)k = Sk^2 – xk$	x	$Sk^2 – xk - x$
3	$(Sk^2 – xk –x)k=Sk^3 – xk^2 - xk$	x	$Sk^3 – xk^2 – xk-x$
4	$Sk^4 – xk^3 – xk^2-xk$	x	$Sk^4 – xk^3 – xk^2-xk-x$

Решите задачу. 31 декабря 2013 года Сергей взял в банке 9 930 000 рублей в кредит под 10% годовых. Схема выплаты кредита следующая: 31 декабря каждого следующего года банк начисляет проценты на оставшуюся сумму долга (то есть увеличивает долг на 10%), затем Сергей переводит в банк определённую сумму ежегодного платежа. Какой должна быть сумма ежегодного платежа, чтобы Сергей выплатил долг тремя равными ежегодными платежами?

Запишите краткое условие, заполните таблицу и решите задачу.

S = 9 930 000 руб.

r % = 10 %

$k = 1 + 0{,}1 = 1{,}1 = \frac{11}{10}$

n = 3 года

Найти ежегодную выплату x.

n (год)	Сумма после начисления процентов (руб.)	Выплаты (руб.)	Сумма после выплат (руб.)
0			S
1	Sk	x	Sk - x
2	$(Sk-x)k = Sk^2 – xk$	x	$Sk^2 – xk - x$
3	$(Sk^2 – xk –x)k=Sk^3 – xk^2 - xk$	x	$Sk^3 – xk^2 – xk -x$

$Sk^3 – xk^2 – xk - x = 0$

Уравнение имеет три параметра: S, k, x.

$Sk^3 – x(k^2 + k + 1) = 0$

$$x = \frac{Sk^3}{k^2 + k + 1}$$

$$x = \frac{Sk^3(k-1)}{k^3 - 1}$$

Применена формула суммы трех первых членов геометрической прогрессии

$$x=\frac{Sk^3(k-1)}{k^3-1}$$

$$x=\frac{9930000\cdot(\frac{11}{10})^3\cdot(\frac{11}{10}-1)}{(\frac{11}{10})^3-1}=\frac{9930000\cdot 11^3\cdot 10^3}{10^3\cdot 10\cdot(1331-1000)}=$$

$$=\frac{993000\cdot 1331}{331}=3993000$$

Ответ: 3 993 000 рублей.

Аннуитетные платежи (несколько неизвестных параметров)

В июле 2023 года планируется взять кредит на некоторую сумму. Условия возврата таковы:

— каждый январь долг увеличивается на 25% по сравнению с концом предыдущего года;

— с февраля по июнь каждого года необходимо выплатить одним платежом часть долга.

Сколько рублей планируется взять в банке, если известно, что кредит будет полностью погашен тремя равными платежами (то есть за три года) и общая сумма выплат после полного погашения кредита на 65 500 рублей больше суммы, взятой в кредит?

S – сумма кредита

r % = 25 %

$k = 1 + 0{,}25 = 1{,}25 = \frac{5}{4}$

n = 3 года

x- ежегодная выплата после начисления процентов.

n (год)	Сумма после начисления процентов (руб.)	Выплаты (руб.)	Сумма после выплат (руб.)
0			S
1	Sk	x	Sk - x
2	$(Sk-x)k = Sk^2 - xk$	x	$Sk^2 - xk - x$
3	$(Sk^2 - xk - x)k = Sk^3 - xk^2 - xk$	x	$Sk^3 - xk^2 - xk - x$

Составим первое уравнение:

$$Sk^3 - xk^2 - xk - x = 0$$

$$Sk^3 - x(k^2 + k + 1) = 0$$

$$x = \frac{Sk^3}{k^2 + k + 1}$$

Составим второе уравнение:

$$3x = S + 65500$$

Составим и решим систему уравнений:

$$\begin{cases} x = \dfrac{Sk^3}{k^2 + k + 1} \\ 3x = S + 65\,500 \end{cases}$$

Ответ: 122 000 рублей


ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА
БАНКОВСКАЯ ЗАДАЧА
ОПИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР
ВКЛАДЫ
КРЕДИТЫ
Кредиты, в которых известна схема, по которой будут производиться выплаты
Кредиты , где долг перед банком погашается несколькими равными платежами
Кредиты с равным уменьшением долга
Аннуитетные платежи
Дифференцированные платежи

Задача. Антон взял кредит в банке на срок 6 месяцев. В конце каждого месяца общая сумма оставшегося долга увеличивается на одно и то же число процентов (месячную процентную ставку), а затем уменьшается на сумму, уплаченную Антоном. Суммы, выплачиваемые в конце каждого месяца, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый месяц уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину. Общая сумма выплат превысила сумму кредита на 63%. Найдите месячную процентную ставку.

S-сумма кредита
r % - процентная ставка

$k = 1 + \frac{r}{100}$
n = 6 месяцев

Сумма выплат равна 1, 63S

n (мес.)	Сумма после начисления процентов (руб.)	Выплаты (руб.)	Сумма после выплат (руб.)
0			
1			
2			
3			
4			
5			
6			

n (мес.)	Сумма после начисления процентов (руб.)	Выплаты (руб.)	Сумма после выплат (руб.)
0			$\frac{6}{6}S$
1	$\frac{6}{6}Sk$	$\frac{6}{6}Sk-\frac{5}{6}S$	$\frac{5}{6}S$
2	$\frac{5}{6}Sk$	$\frac{5}{6}Sk-\frac{4}{6}S$	$\frac{4}{6}S$
3	$\frac{4}{6}Sk$	$\frac{4}{6}Sk-\frac{3}{6}S$	$\frac{3}{6}S$
4	$\frac{3}{6}Sk$	$\frac{3}{6}Sk-\frac{2}{6}S$	$\frac{2}{6}S$
5	$\frac{2}{6}Sk$	$\frac{2}{6}Sk-\frac{1}{6}S$	$\frac{1}{6}S$
6	$\frac{1}{6}Sk$	$\frac{1}{6}Sk$	0

Найдем сумму выплат:

$$\left(\frac{6}{6}Sk-\frac{5}{6}S\right)+\left(\frac{5}{6}Sk-\frac{4}{6}S\right)+\left(\frac{4}{6}Sk-\frac{3}{6}S\right)+\ldots+\left(\frac{3}{6}Sk-\frac{2}{6}S\right)+\left(\frac{2}{6}Sk-\frac{1}{6}S\right)+\frac{1}{6}Sk=$$

Сгруппируем слагаемые, собрав в первую скобку все положительные слагаемые, во вторую – все отрицательные (минус вынесем за скобки):

$$=\left(\frac{6}{6}Sk+\frac{5}{6}Sk+\frac{4}{6}Sk+\frac{3}{6}Sk+\frac{2}{6}Sk+\frac{1}{6}Sk\right)-\left(\frac{5}{6}S+\frac{4}{6}S+\frac{3}{6}S+\frac{2}{6}S+\frac{1}{6}S\right)=$$

Преобразуем сумму, вынесем общие множители за скобки:

$$=\frac{6+1}{2\cdot 6}\cdot 6\cdot Sk-\frac{5+1}{2\cdot 6}\cdot 5\cdot S=\frac{7}{2}Sk-\frac{5}{2}S=\left(\frac{7}{2}k-\frac{5}{2}\right)S$$

По условию задачи сумма выплат равна 1,63S:

$$\left(\frac{7}{2}k-\frac{5}{2}\right)S=1{,}63S$$

Разделим обе части равенства на S и умножим на 2:

$7k - 5=3{,}26$

$7k = 8{,}26$

$k = 1{,}18$

$1 + \frac{r}{100} = 1{,}18$

$r = 18$

<u>**Ответ**</u>: 18 %

Задача (в общем виде) В банке взят кредит S миллион рублей под r % годовых, выплатить который нужно за n лет, при этом суммы, выплачиваемые в конце каждого года, подбираются так, чтобы в результате сумма долга каждый год уменьшалась равномерно, то есть на одну и ту же величину.

n (год)	Сумма после начисления процентов (руб.)	Выплаты (руб.)	Сумма после выплат (руб.)
0			$\frac{n}{n}S$
1	$\frac{n}{n}Sk$	$\boxed{\frac{n}{n}Sk-\frac{n-1}{n}S}$	$\frac{n-1}{n}S$
2	$\boxed{\frac{n-1}{n}Sk}$	$\frac{n-1}{n}Sk-\frac{n-2}{n}S$	$\boxed{\frac{n-2}{n}S}$
3	$\frac{n-2}{n}Sk$	$\boxed{\frac{n-2}{n}Sk-\frac{n-3}{n}S}$	$\frac{n-3}{n}S$
…	…	…	…
n-1	$\boxed{\frac{2}{n}Sk}$	$\frac{2}{n}Sk-\frac{1}{n}S$	$\boxed{\frac{1}{n}S}$
n	$\frac{1}{n}Sk$	$\boxed{\frac{1}{n}Sk}$	0

Найдем сумму выплат, сгруппировав слагаемые, собрав в первую скобку все положительные слагаемые, во вторую – все отрицательные (минус вынесем за скобки):

$$(\frac{n}{n}Sk+\frac{n-1}{n}Sk+\frac{n-2}{n}Sk+\ldots\frac{2}{n}Sk+\frac{1}{n}Sk)-(\frac{n-1}{n}S+\frac{n-2}{n}S+$$

$$+\frac{n-3}{n}S+\ldots\frac{1}{n}S)=$$

Обратим внимание, что в первой скобке n слагаемых, а во второй n – 1.

Преобразуем сумму, вынесем общие множители за скобки:

$$\left(\frac{n+(n-1)+(n-2)+\ldots+2+1}{n}\right)Sk-\left(\frac{(n-1)+(n-2)+\ldots 2+1}{n}\right)S=$$

Выражения, стоящие в числители – сумма первых n членов арифметической прогрессии с первым членом, равным 1. Количество слагаемых в первом случае равно n, а во втором n-1. Применим формулу для вычисления суммы n первых членов арифметической прогрессии:

$$=\left(\frac{(n+1)n}{2n}\right)Sk-\left(\frac{(n-1+1)(n-1)}{2n}\right)S$$

Формула: $S_n=\frac{a_1+a_n}{2}\cdot n$

Упростим выражение, сократив дроби. Получим формулу для нахождения суммы выплат:

$$\frac{n+1}{2}Sk-\frac{n-1}{2}S$$

Равное уменьшение долга + 1 месяц

S - сумма кредита

r% - процентная ставка

$k = 1 + \frac{r}{100}$

(n+1) месяц

x - уменьшение долга с 1 по n месяц

n	Сумма после начисл. процент	Выплаты	Сумма после выплат
0			S
1	Sk	$Sk - S + x\cdot 1$	$S - x\cdot 1$
2	$Sk - xk\cdot 1$	$Sk - xk\cdot 1 - S + x\cdot 2$	$S - x\cdot 2$
...	...	...	...
n−1	$Sk - x(n-2)\cdot k$	$Sk - x(n-2)k - S + x(n-2)$	$S - x\cdot(n-1)$
n	$Sk - x(n-1)\cdot k$	$Sk - x(n-1)k - S + xn$	$S - xn = y$
n+1	yk	$y\cdot k$	

Сумма выплат:

$$Sk\cdot n - Sn - xk(1+2+\ldots+(n-1)) + x(1+2+\ldots+n) + yk = Sn(k-1) - \frac{xk\,n\cdot(n-1)}{2} + \frac{x\cdot(n+1)\cdot n}{2} + yk$$

Равное уменьшение долга + 1 месяц

15-го декабря планируется взять кредит в банке на 1 000 000 рублей на (n + 1) месяц. Условия его возврата таковы:
— 1-го числа каждого месяца долг возрастает на r % по сравнению с концом предыдущего месяца;
— со 2-го по 14-е число каждого месяца необходимо выплатить часть долга;
— 15-го числа каждого месяца с 1-го по n-й долг должен быть на 40 тысяч рублей меньше долга на 15-е число предыдущего месяца;
— 15-го числа n-го месяца долг составит 200 тысяч рублей;
— к 15-му числу (n + 1)-го месяца кредит должен быть полностью погашен.
Найдите r, если известно, что общая сумма выплат после полного погашения кредита составит 1378 тысяч рублей.

$S = 1000$ тыс. руб.

$r\%$ − ?

$k = 1 + \frac{r}{100}$

$(n+1)$ месяц

сумма выплат: 1378 тыс. руб.

$x = 40$ тыс. руб; $y = 200$ тыс. руб.

Сумма долга после выплат в n-ый месяц:

$$S - xn = y$$

$$1000 - 40n = 200$$

$$40n = 800$$

$$n = 20$$

n	Сумма после начисления проц.	Выплаты (тыс. руб)	Сумма после выплат (тыс. руб)
0			1000
1	$1000k$	$1000k - 960$	960
2	$960k$	$960k - 920$	920
...	...	...	...
19	$280k$	$280k - 240$	240
20	$240k$	$240k - 200$	200
21	$200k$	$200k$	0

сумма выплат:

$$(1000 + 960 + \ldots + 280 + 240 + 200)k - (960 + 920 + \ldots + 200) = 1378$$

$$\frac{1200 \cdot 21}{2}k - \frac{1160 \cdot 20}{2} = 1378$$

$$12600k - 11600 = 1378$$

$$12600k = 12978; \quad k = 1{,}03$$

$$1 + \frac{r}{100} = 1{,}03$$

$$r = 3$$

Ответ: 3%


ЭКОНОМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА
БАНКОВСКАЯ ЗАДАЧА
ОПИМАЛЬНЫЙ ВЫБОР
ВКЛАДЫ
КРЕДИТЫ
Кредиты, в которых известна схема, по которой будут производиться выплаты
Кредиты , где долг перед банком погашается несколькими равными платежами
Кредиты с равным уменьшением долга
Аннуитетные платежи
Дифференцированные платежи

Экономическая задача (оптимальный выбор)

Задача содержится в материалах, рекомендованных для изучения математики по программе «Математическая вертикаль плюс»

1.10.2 Задачи экономического содержания

Пример 10. Дмитрий является владельцем двух заводов в разных городах. На заводах производятся абсолютно одинаковые товары, но на заводе, расположенном во втором городе, используется более совершенное оборудование. В результате:

если рабочие на заводе, расположенном в первом городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $2t$ единиц товара;

если рабочие на заводе, расположенном во втором городе, трудятся суммарно t^2 часов в неделю, то за эту неделю они производят $3t$ единиц товара.

За каждый час работы (на каждом из заводов) Дмитрий платит рабочему 500 рублей. Дмитрию нужно каждую неделю производить 520 единиц товара. Какую наименьшую сумму придётся тратить еженедельно на оплату труда рабочих?

Первый завод: t^2 часов $\longrightarrow$ $2t$ единиц товара

$\left(\frac{t}{2}\right)^2$ часов $\longleftarrow$ t единиц товара

$2t = x$

$t = x/2$

Второй завод: t^2 часов $\longrightarrow$ $3t$ единиц товара

$\left(\frac{t}{3}\right)^2$ часов $\longleftarrow$ t единиц товара

$3t = 520-x$

$t=(520-x)/3$

Завод	Количество произведенного товара (шт.)	Количество часов
1	x	$\left(\frac{x}{2}\right)^2$
2	520 – x	$\left(\frac{520-x}{3}\right)^2$

Составим выражение для вычисления суммы выплат на двух заводах:

$$500\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{520-x}{3}\right)^2\right)$$

Рассмотрим функцию:

$$f(x) = 500\left(\left(\frac{x}{2}\right)^2+\left(\frac{520-x}{3}\right)^2\right)$$

Найдем наименьшее значение функции на отрезке $[0:520]$

Преобразуем формулу функции:

$$F(x) = 500\left(\frac{x^2}{4} + \frac{(520-x)^2}{9}\right)$$

$$F(x) = \frac{500}{36}\,(9x^2 + 4\cdot 520^2 - 4160x + 4x^2)$$

$$F(x) = \frac{500}{36}\,(13x^2 + 4\cdot 520^2 - 4160x)$$

$$F(x) = \frac{500\cdot 13}{36}\,(x^2 + 83200 - 320x)$$

Найдем производную функции:

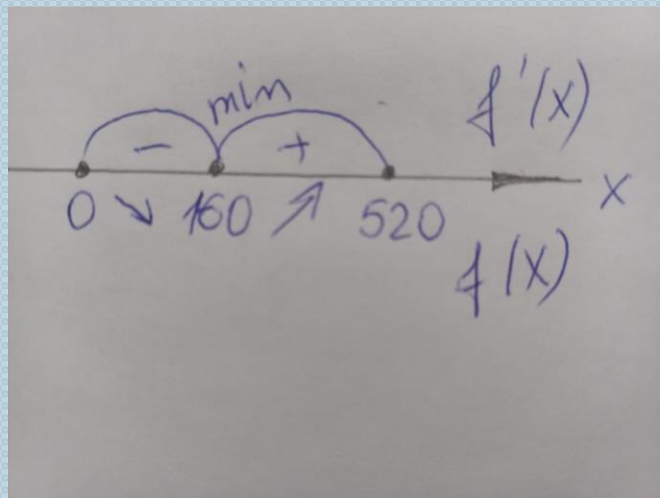
$$F^{/}(x) = \frac{500\cdot 13}{36}(2x - 320)$$

Решим уравнение $F^{/}(x) = 0$

2x-320=0

x = 160

Определим знаки производной функции на указанных промежутках



На отрезке [0; 520] функция принимает наименьшее значение в точке минимума x = 160. Вычислим значение функции в данной точке.

$$f(160)=\frac{500\cdot 13}{36}\left(160^2+4\cdot 520^2-320\cdot 160\right)=$$

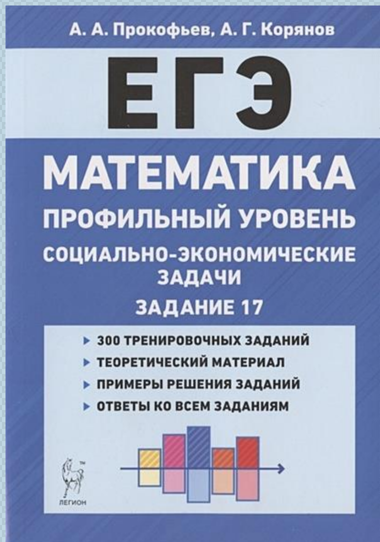
$$=\frac{500\cdot 13}{36}\left(40^2\cdot 4^2+40^2\cdot 13\cdot 4-\underbrace{40\cdot 8\cdot 40\cdot 4}_{40^2}\right)=$$

$$=\frac{500\cdot 13\cdot 40^2}{36}\left(16+52-32\right)=$$

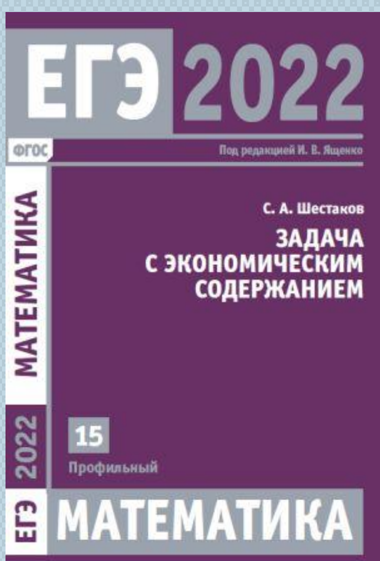
$$=\frac{500\cdot 13\cdot 40^2}{36}\cdot 36=10\ 400\ 000$$

Ответ: 10 400 000 рублей

ЛИТЕРАТУРА



Прокофьев А.А., Корянов А. ЕГЭ. Математика. Профильный уровень. Социально-экономические задачи. Задание 17.



Шестаков С.А. ЕГЭ 2022. Математика. Задача с экономическим содержанием (профильный уровень)

Спасибо за внимание!