Иррациональности

Определения корня чётной степени и нечётной степени различны. Об этом полезно помнить, приступая к изучению иррациональностей.

Определение 1.
Квадратным корнем из числа a называется такое неотрицательное число b, которое в квадрате даёт a. Определение корня любой другой *чётной* степени аналогично.

$$\sqrt{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0, \\ b^2 = a. \end{cases}$$

$$\sqrt[2n]{a} = b \Leftrightarrow \begin{cases} b \geq 0, \\ b^{2n} = a. \end{cases}$$

Отсюда следует, что *корень чётной степени, в частности, квадратный корень из отрицательного числа не определён на множестве действительных чисел.* Это означает, например, что $\sqrt{-1}$ не является числом действительным!

Задача 1.1. Найдите все действительные значения x (или пары (x, y)), при каждом из которых определено выражение (является действительным числом)

а. $\sqrt{xy}$;

б. $\sqrt[4]{-x^2y}$;

в. $\sqrt[6]{2-x} + \sqrt[8]{-2-x}$;

г. $\sqrt{y-x} + \sqrt{x+y-2}$;

д. $\sqrt[4]{16-x^2} + \sqrt{x+2}$;

е. $\sqrt{12-x-x^2} + \sqrt{-x-2}$.

Задача 1.2. Найдите на координатной плоскости все пары (x, y), для которых справедливы равенства или неравенства.

а. $x\sqrt{y} \leq 0$;

б. $y\sqrt[4]{-x} \geq 0$;

в. $x\sqrt[6]{xy} \leq x$;

г. $(x+1)\sqrt[4]{y-x} < 0$;

Задача 1.3. Выпишите (тщательно) и вспомните доказательства свойств корней чётной степени.

а. $\sqrt[2n]{xy} = \sqrt[2n]{x}\,\sqrt[2n]{y}, \forall x \geq 0, y \geq 0.$

б. $\sqrt[2n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[2n]{x}}{\sqrt[2n]{y}}, \forall x \geq 0, y > 0.$

в. $\sqrt[2n]{xy} = \sqrt[2n]{-x}\,\sqrt[2n]{-y}, \forall x \leq 0, y \leq 0.$

г. $\sqrt[2n]{\dfrac{x}{y}} = \dfrac{\sqrt[2n]{-x}}{\sqrt[2n]{-y}}, \forall x \leq 0, y < 0.$

д. $\sqrt[2n]{x^{2n}} = |x|, \forall x \in \mathbb{R}.$

е. $\left(\sqrt[2m]{x}\right)^n = \sqrt[2m]{x^n}, \forall x \geq 0.$ Отметим, что при $x < 0$ выражение слева не определено.

ж. Если числа m, n — нечётные, то $\sqrt[2mn]{x^n} = \sqrt[2m]{x}, \forall x \geq 0;$ $\sqrt[2mn]{x^{2m}} = \sqrt[n]{|x|}, \forall x \in \mathbb{R}.$

Задача 1.4. Вычислите (не используя калькулятор) и обоснуйте результат.

а. $\sqrt{11 \cdot 44} + \sqrt{34 \cdot 26} - 6\sqrt{84 \cdot 189}$;

б. $\sqrt{0,1 \cdot 0,4 \cdot 0,9 \cdot 2,5}$;

в. $\sqrt[4]{2^5 \cdot 8^5 \cdot 9^8 \cdot 7^4}$;

г. $\sqrt[6]{x^5 \cdot y^{11} \cdot y \cdot x^{11}}$;

д. $\sqrt{\frac{11}{12} \cdot \frac{396}{75}}$;

е. $\sqrt{a^6 \cdot b^5 \cdot b^3 \cdot a^4}$;

ж. $\sqrt{a^3 \cdot b^2 \cdot b^6 \cdot a^7}$;

з. $\sqrt[6]{\dfrac{p^4 q^7 r^{-8}}{p^{10} q^{-5} r^{10}}}$.

Задача 1.5. Постройте графики функций $y = f(x)$.

а. $f(x) = 2 + \sqrt{x}$;

б. $f(x) = 3 - \sqrt{-x}$;

в. $f(x) = 2 - 4\sqrt{-x}$;

г*. $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{1+x}$;

д. $f(x) = \sqrt{1-x} - \sqrt{x-1}$;

е. $f(x) = \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{x-1}$;

ж. $f(x) = \sqrt{1-x} + \sqrt{-x^2+3x-2} + \sqrt{-x^2+4x-3}$;

з. $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt{3-x}, x \geq -1 \\ -2 - x, x < -1 \end{cases}$

и. $f(x) = \begin{cases} 5 - 3\sqrt{1 - \dfrac{x}{2}}, 0 \leq x \leq 2 \\ 4 - \sqrt[4]{x+16}, x < 0 \end{cases}$

Задача 1.6. Для каждой функции из задачи 1.4. выясните, при каких m уравнение $f(x) = m$ имеет решение.

Методы решения уравнений и неравенств, содержащих корни *чётной степени* основаны на следующих утверждениях.

Утв. 1.

$$\sqrt{X} = \sqrt{Y} \Leftrightarrow \begin{cases} X = Y \geq 0. \end{cases}$$

Утв. 2.

$$\sqrt{X} \leq \sqrt{Y} \Leftrightarrow \begin{cases} X \leq Y, \\ X \geq 0. \end{cases}$$

Утв. 3.

$$\sqrt{X} = Y \Leftrightarrow \begin{cases} Y \geq 0, \\ X = Y^2. \end{cases}$$

Утв. 4.

$$\sqrt{X} \leq Y \Leftrightarrow \begin{cases} X \geq 0, \\ Y \geq 0, \\ X \leq Y^2. \end{cases}$$

Утв. 5.

$$\sqrt{X} \geq Y \Leftrightarrow 1) \begin{cases} Y < 0, \\ X \geq 0, \end{cases} \quad \text{а также } 2) \begin{cases} Y \geq 0, \\ X \geq Y^2. \end{cases}$$

Утв. 6.
Разность

$$\sqrt{X} - \sqrt{Y} \bigvee 0 \Leftrightarrow \begin{cases} X - Y \bigvee 0, \\ X \geq 0, \\ Y \geq 0, \end{cases}$$

где знак $\bigvee$ заменяет один из четырёх $<, >, \leq, \geq$ знаков неравенства. Это очень полезное свойство позволяет значительно упростить решение неравенств определённого вида. Например, решим неравенство

$$\frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{8-x}}{\sqrt{x} - 2} \leq 0.$$

Используя утверждение 6 запишем систему, равносильную данному неравенству:

$$\frac{\sqrt{2x-1} - \sqrt{8-x}}{\sqrt{x} - 2} \leq 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{(2x-1)-(8-x)}{x-4} \leq 0, \\ 2x-1 \geq 0, \\ 8-x \geq 0, \\ x \geq 0 \end{cases} \Leftrightarrow 3 \leq x < 4.$$

Задача 1.7. Решите уравнения, используя утверждения 1 или 3.

а. $\sqrt{x+2} = \sqrt{x^2-5x-14}$;

б. $\sqrt{|x|-2} = \sqrt{x^2-5|x|-14}$;

в. $\sqrt{x^2-7x+1} = x+4$;

г. $\sqrt{x-7} = 9-x$;

д. $\sqrt{4x-3} = 9-8|x|$;

е. $\sqrt{\sqrt{x}+3} + 2\sqrt{x} = 3$;

ж. $\sqrt{x+1} - \sqrt{5x-14} = 1$;

з. $|2\sqrt{-x}-1| + |-x-3| = 4$

Задача 1.8. Решите неравенства, используя утверждения 2, 4 или 5.

а. $\sqrt{x+2} < 2$;

б. $\sqrt{|x|-2} \geq 1$;

в. $\sqrt{|x-2|-5} \geq -1$;

г. $(x-1)\sqrt{x} \geq 0$;

д. $(x-5)\sqrt{-x} \geq 0$;

е. $(x^2-x-42)\sqrt{x} \leq 0$;

ж. $(x^2+x-42)\sqrt{x+7} \geq 0$;

з. $\sqrt{2x^2-7x} \leq x$;

и. $\sqrt{7-6x-x^2} \geq -x$;

к. $\sqrt{4x} > 9-7x$;

л. $\sqrt{\sqrt{x}+3} + 2\sqrt{x} \leq 3$;

м. $\sqrt{x+1} - \sqrt{5x-14} > 1$;

н. $|2\sqrt{-x}-1|+|-x-3|<4$

Задача 1.9. Исследуйте множество решений неравенства в зависимости от параметра a.

а. $\sqrt{x+2a}<a$;

б. $\sqrt{2-x}\ge a$;

в. $\sqrt{\sqrt{x+3}+2\sqrt{a}}\le 3$;

г. $\sqrt{x+1}\ge a-x$;

д. $(x-a)\sqrt{2x-3a}\ge 0$;

е. $(x-5+a)(3x+4-2a)\sqrt{-x}\ge 0$;

ж. $(x^2-x-a^2-a)\sqrt{x}\le 0$;

з. $(x^2+x-4a^2+2a)\sqrt{x+7}\ge 0$;

и. $\sqrt{2x^2-7x}\le a-x$;

к. $\sqrt{a-6x-x^2}\ge x$;

л. $\sqrt{a-x}-\sqrt{x-a+8}>4a$.

Выделим ещё важный способ решения иррациональных уравнений и неравенств — **замена переменной.**

Этим способом удобно решать следующие уравнения и неравенства:

$$\sqrt{aX+b}\le cX+d,$$

где X — выражение (функция), зависящая от одной переменной.

Выбирают новую переменную

$$t=\sqrt{X},\quad t\ge 0.$$

Например,

$\sqrt{x+3}\le 15-2x$; $\sqrt{x^2+x+3}\le 15-2x-2x^2$; $\sqrt{7\sin x+3}\le 15-24\sin x$ и т.п.

Решим первое неравенство.

1) Пусть $t=\sqrt{x+3},\quad t\ge 0$. Тогда решим неравенство

$$t\le 15-2(t^2-3),$$

при условии $t\ge 0$. Имеем

$$\begin{cases} t\ge 0,\\ 2t^2+t-21\le 0.\end{cases}\quad\Leftrightarrow\begin{cases} t\ge 0,\\ (t-3)(2t+7)\le 0.\end{cases}\quad\Leftrightarrow 0\le t\le 3,$$

поскольку выражение $2t+7>0$ при $t\ge 0$.

2) Обратная замена

$$0\le t\le 3\Rightarrow 0\le\sqrt{x+3}\le 3\Leftrightarrow 0\le x+3\le 9\Leftrightarrow -3\le x\le 6.$$

Ответ: $[-3;6]$.

Определение 2.

Кубическим корнем (корнем третьей степени) из числа a называется такое число b, которое в кубе (в третьей степени) даёт a. Определение корня любой другой *нечётной* степени аналогично.

$$\sqrt[3]{a} = b \Leftrightarrow b^3 = a.$$

$$\sqrt[2n+1]{a} = b \Leftrightarrow b^{2n+1} = a.$$

Задача 1.10. Выпишите и докажите свойства корней нечётной степени.

Задача 1.11. Найдите все действительные значения x, при каждом из которых определено выражение (является действительным числом)

а. $\sqrt[3]{x}$;

б. $\sqrt[5]{1 - \frac{1}{x}}$;

в. $\sqrt[3]{x} + \sqrt[4]{-x}$;

г. $\sqrt[3]{1-x} + \sqrt{x-2}$;

Задача 1.12. Постройте графики функций $y = f(x)$.

а. $f(x) = 2 - \sqrt[3]{x}$;

б. $f(x) = 3 - \sqrt[5]{-x}$;

в. $f(x) = 2 - 4\sqrt[3]{-x}$;

г. $f(x) = \sqrt[3]{1-x} + \sqrt[3]{x+1}$;

д. $f(x) = \begin{cases} 1 - \sqrt[3]{7-x}, x \geq -1 \\ -2 - x, x < -1 \end{cases}$

е. $f(x) = \begin{cases} 5 - 3\sqrt[3]{1 - \dfrac{x}{2}}, x \leq 2 \\ 5 - \sqrt[4]{x-2}, x > 2 \end{cases}$

Задача 1.13. Для каждой функции из задачи 1.11. выясните, при каких m уравнение $f(x) = m$ имеет решение.

Задача 1.14. Вычислите (не используя калькулятор) и обоснуйте результат.

а. $\sqrt[3]{88 \cdot 121} + \sqrt[3]{136 \cdot 289} - 8\sqrt[4]{\frac{1}{16}}$;

б. $\sqrt[3]{0,064 \cdot 0,1 \cdot 0,8 \cdot 2,7}$;

в. $\sqrt[5]{2^{10} \cdot 8^5 \cdot 9^5}$;

г. $\sqrt[3]{x^5 \cdot y^{-11} \cdot x^{10} \cdot y^2}, x = 0,1; y = 0,01$;

д. $\sqrt[4]{8 \cdot 162} - \sqrt{\sqrt[3]{64}}$;

е. $\sqrt[10]{4} : \sqrt[5]{18}$.

Задача 1.15. Сравните числа a и b.

а. $a = \sqrt[4]{8 \cdot 162}; b = \sqrt{\sqrt[3]{64}}$;

б. $a = \sqrt{2} \cdot \sqrt[3]{3}; b = \sqrt[6]{73}$;

в. $a = \sqrt{23} - \sqrt[3]{32}; b = 1$;

г. $a = \sqrt{2} + \sqrt[3]{2}; b = 3$;

д. $a = \sqrt[3]{25}$; $b = \sqrt[5]{81}$;

е. $a = \sqrt[10]{6}; b = \sqrt[5]{19}$.

Методы решения уравнений и неравенств, содержащих корни *нечётной степени* основаны на следующих утверждениях.

Утв. 6.

$$\sqrt[3]{X} = \sqrt[3]{Y} \Leftrightarrow X = Y$$

Утв. 7.

$$\sqrt[3]{X} \le \sqrt[3]{Y} \Leftrightarrow X \le Y$$

Аналогично и для любых других одинаковых нечётных степеней.

Задача 1.16. Решите уравнение или неравенство.

а. $\sqrt[3]{x+2} = \sqrt[3]{x^3+4x^2-4x+2}$;

б. $(3x+5)^2(\sqrt[3]{x+2} - \sqrt[3]{x^3+4x^2-4x+2}) \le 0$;

в. $\dfrac{\sqrt[5]{4x+6} - \sqrt[5]{7x-11}}{x^2+x-2} \ge 0$;

г. $\sqrt[7]{25-x} + \sqrt[7]{3x-7} = 0$;

д. $\sqrt[3]{x+5} + \sqrt[3]{15-7x-2x^2} = 0$;

е. $\sqrt{1-x} + \sqrt[3]{2x-1} \ge 0$.

Методы решения систем иррациональных уравнений и неравенств ничем не отличается от методов решения произвольных нелинейных систем уравнений и неравенств.

Рассмотрим два примера решения системы уравнений и неравенств.

Задача 1.17. Решите систему

$$\begin{cases} y\sqrt{x} + x\sqrt{y} = 30, \\ x\sqrt{x} + y\sqrt{y} = 35, \end{cases}$$

Решение. Мы видим, что ни одна из переменных не может равняться 0. Сделаем **замену:**

$$a = \sqrt{x}; b = \sqrt{y}, a > 0; b > 0$$

и решим систему:

$$\begin{cases} ab^2 + a^2b = 30, \\ a^3 + b^3 = 35, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{ab^2 + a^2b}{a^3+b^3} = \dfrac{30}{35}, \\ a^3 + b^3 = 35, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dfrac{ab}{a^2 - ab + b^2} = \dfrac{6}{7}, \\ a^3 + b^3 = 35, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a^2 - 13ab + b^2 = 0, \\ a^3 + b^3 = 35, \end{cases}$$

Из уравнения $a^2 - 13ab + b^2 = 0$, рассматривая его как квадратное относительно a, находим, что либо $a = \dfrac{2b}{3}$, либо $a = \dfrac{3b}{2}$.

Для каждой полученной системы

$$\begin{cases} a = \dfrac{2b}{3}, \\ a^3 + b^3 = 35, \end{cases} \quad \text{или} \begin{cases} a = \dfrac{3b}{2}, \\ a^3 + b^3 = 35, \end{cases}$$

Получаем

$$\begin{cases} a = 3, \\ b = 2, \end{cases} \quad \text{или} \begin{cases} a = 2, \\ b = 3, \end{cases}$$

Теперь после обратной замены находим окончательно

$$\begin{cases} a = \sqrt{x} = 3 \Leftrightarrow x = 9, \\ b = \sqrt{y} = 2, \Leftrightarrow y = 4; \end{cases} \quad \text{или} \begin{cases} a = \sqrt{x} = 2, \Leftrightarrow x = 4 \\ b = \sqrt{y} = 3, \Leftrightarrow y = 9 \end{cases}$$

Ответ:$(4; 9), (9; 4)$.

Задача 1.18. Решите систему

$$\begin{cases} \dfrac{\sqrt{x^2 - 16}}{\sqrt{x - 3}} + \sqrt{x - 3} > \dfrac{5}{\sqrt{x - 3}}, \\ \sqrt{x^2 - 20x + 100} + \sqrt{x^2 + 20x + 100} \leq 20. \end{cases}$$

Решение. Сначала решим первое неравенство.

Замечаем, что в силу данного неравенства $\sqrt{x - 3} > 0$. Поэтому первое неравенство равносильно неравенству

$$\sqrt{x^2 - 16} + (\sqrt{x - 3})^2 > 5 \Leftrightarrow \begin{cases} x > 3, \\ \sqrt{x^2 - 16} > 8 - x. \end{cases}$$

Возможны два случая

$$\begin{cases} x > 3, \\ 8 - x < 0, \\ x^2 - 16 \geq 0 \end{cases} \quad \text{и} \quad \begin{cases} x > 3, \\ 8 - x \geq 0, \\ x^2 - 16 > 64 - 16x + x^2 \Leftrightarrow x > 5. \end{cases}$$

Объединяя решения этих систем получаем решение первого неравенства : $x > 5$.

Решим второе неравенство. Имеем

$$\sqrt{x^2 - 20x + 100} + \sqrt{x^2 + 20x + 100} \leq 20 \Leftrightarrow |x - 10| + |x + 10| \leq 20.$$

Вообще говоря, известно, $\min |x - a| + |x + a| = 2a, a > 0$, причём на $-a \leq x \leq a$ выполняется равенство $|x - a| + |x + a| = 2a$. Поэтому

$$|x - 10| + |x + 10| \leq 20 \Leftrightarrow -10 \leq x \leq 10.$$

Получили решение второго неравенства. Чтобы получить решение системы необходимо и достаточно найти все общие решения первого и второго неравенств. Удобнее всего эти решения искать на координатной прямой.

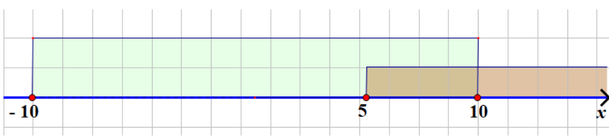

Рис. 1:

Ответ: $(5; 10]$.

Если вы на уроках не разбирали решение неравенств $|x-a|+|x+a| \leq p, p \geq 0$, то это полезно сделать, например, графически.

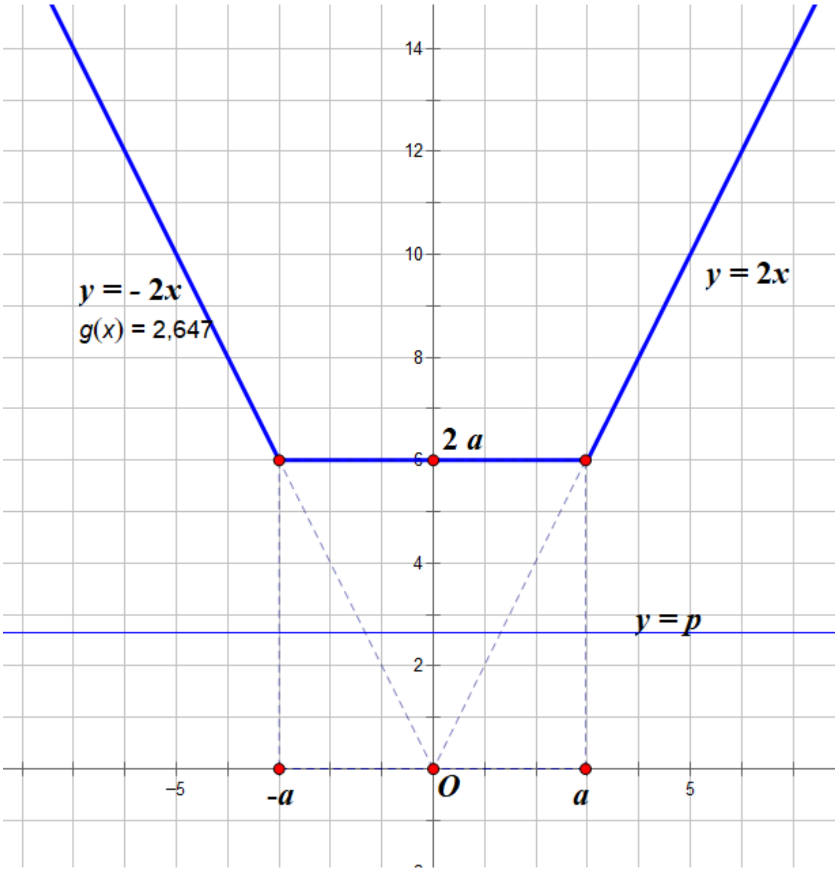

Рис. 2:

Мы видим, что

если $p < 2a$, то неравенство решений не имеет.

Если $p = 2a$, то решением неравенства является отрезок $-a \leq x \leq a$.

Если $p > 2a$, то решением неравенства является отрезок $-\frac{p}{2} \leq x \leq \frac{p}{2}$.