

Методические особенности организации кружка по математике в 8 классе

Балмасов Евгений Сергеевич

Поиск материалов

- ▶ <https://math.mosolymp.ru/archive> (Архив материалов кружков в различных школах Москвы)
- ▶ <https://problems.ru> (Большая подборка задач по уровню сложности с решениями)
- ▶ <http://mmmf.msu.ru/archive/> (Архив Малого мехмата)

Программа первого полугодия

Четность. Повторение	Остатки. Задачи
Принцип Дирихле. Повторение	Логика - высказывания.
Делимость. Повторение	Нок и Нод (например, с точки зрения представления чисел в виде $dk dm$)
Комбинаторика. Повторение.	Графы, картиночки
Оценка + пример.	Графы, деревья
Остатки. Лекция + примеры	

Программа второго полугодия

Задачи на движение	Алгоритмы (типо жадный например)
Логика - высказывания.	Геометрия. Средняя линия
Остатки. Задачи	Сумма кратных тоже кратно.
Индукция. Лекция.	Диофантовы уравнения
Индукция. Задачи.	Алгоритм Евклида
Индукция. Задачи.	Текстовые задачи
Геометрия. Медиана в прямоугольном треугольнике	Геометрия. Про трапецию
Простые Средние (для двух чисел)	Геометрия. Про подобие

Четность. Разбиение на пары. Задачи

- ▶ Можно ли на шахматной доске расставить 7 коней так, чтобы каждый бил ровно одного другого?
- ▶ На доске 25×25 расставлены 25 шашек, причем их расположение симметрично относительно диагонали. Докажите, что хотя бы одна из шашек расположена на диагонали.

Делимость. Задачи.

- ▶ Петя сложил некоторые 5 последовательных натуральных чисел. Может ли их сумма оказаться простым числом?
- ▶ У Маши и Вики было одинаковое количество конфет. Маша съела в 8 раз меньше конфет, чем Вика, а осталось у нее в 9 раз больше конфет, чем у Вики. Докажите, что изначально количество конфет у каждой из девочек делилось на 71.
- ▶ По пакетам разложены 109 яблок. В некоторых пакетах лежит по x яблок, в других — по 3 яблока. Найдите все возможные значения x , если всего пакетов — 20

Комбинаторика. Числа сочетаний.

Задачи

- ▶ Посчитайте
 - (a) количество пятизначных чисел, состоящих только из нечетных цифр;
 - (b) количество пятизначных чисел, в которых нет цифры 5;
 - (c) количество пятизначных чисел, в которых есть цифра 5;
 - (d) количество семизначных чисел, с суммой цифр равной 3;
 - (e) количество четырехзначных чисел, в которых цифры идут по убыванию;
 - (f) количество шестизначных чисел, в которых цифры идут по возрастанию;

Остатки. Задачи

- ▶ Может ли остаток от деления простого числа на 30 быть составным числом?
- ▶ Найдите все натуральные числа, при делении которых на 11 в неполном частном получится то же число, что и в остатке.
- ▶ Числа 100 и 90 разделили на одно и тоже число. В первом случае получили в остатке 4, во втором — 18. На какое число делили?

Индукция. Теория

- ▶ Часто требуется доказать утверждение типа: «Для каждого натурального n верно, что...». Такое утверждение можно рассматривать, как цепочку утверждений «Для $n = 1$ верно, что ...», «Для $n = 2$ верно, что ...» и т.д.
- ▶ *Метод математической индукции состоит в том, чтобы доказать первое из этих утверждений (называемое базой или основанием индукции), что обычно достаточно просто сделать, а затем доказать шаг (или переход) индукции: «Если верно утверждение с номером k , то верно утверждение с номером $(k + 1)$ ».*

Если верна база индукции и верен шаг индукции, то все утверждения верны.

Индукция. Задачи

- ▶ На столе стоят (а) 2 (б) 8 стаканов с водой. Разрешается взять любые два стакана и уравнять в них количества воды, перелив часть воды из одного стакана в другой.
Докажите, что с помощью таких операций можно добиться того, чтобы во всех стаканах было поровну воды.
- ▶ Головоломка «Ханойские башни» представляет собой N дисков, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трех колышков. Требуется переместить всю башню на другой колышек, перенося каждый раз только один диск и не помещая больший диск на меньший.
Докажите, что головоломка имеет решение для (а) $N = 4$; (б) $N = 5$.

Индукция. Задачи

- ▶ Решите задачу 1 для 2^n стаканов с водой для произвольного n .
- ▶ Решите задачу 2 для произвольного N .
- ▶ Докажите тождества методом математической индукции:
 - ▶ (а) $1 + 2 + \dots + n = n(n + 1)/2$
 - ▶ (б) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$
 - ▶ (в) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = n(n + 1)(2n + 1)/6$
- ▶ Любую ли сумму из целого числа рублей больше семи, можно уплатить без сдачи денежными купюрами по 3 и 5 рублей?
- ▶ Несколько прямых делят плоскость на части. Докажите, что эти части можно раскрасить в 2 цвета так, что граничащие части будут иметь разный цвет.

Метод математической индукции.

Часто требуется доказать утверждение типа: «Для каждого натурального n верно, что ...». Такое утверждение можно рассматривать, как цепочку утверждений «Для $n = 1$ верно, что ...», «Для $n = 2$ верно, что ...» и т.д.

Метод математической индукции состоит в том, чтобы доказать первое из этих утверждений (называемое **базой** или основанием индукции), что обычно достаточно просто сделать, а затем доказать **шаг** (или **переход**) индукции: «Если верно утверждение с номером k , то верно утверждение с номером $(k + 1)$ ».

Если верна база индукции и верен шаг индукции, то все утверждения верны.

- 1. На столе стоят **(а) 2 (б) 8** стаканов с водой. Разрешается взять любые два стакана и уравнять в них количества воды, перелив часть воды из одного стакана в другой. Докажите, что с помощью таких операций можно добиться того, чтобы во всех стаканах было поровну воды.
0. Головоломка «Ханойские башни» представляет собой N дисков, нанизанных в порядке уменьшения размеров на один из трех кольшков. Требуется переместить всю башню на другой кольшек, перенося каждый раз только один диск и не помещая больший диск на меньший. Докажите, что головоломка имеет решение для **(а) $N = 4$; (б) $N = 5$.**
1. Решите задачу -1 для 2^n стаканов с водой для произвольного n .
2. Решите задачу 0 для произвольного N .
3. Докажите тождества *методом математической индукции*:
(а) $1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}$
(б) $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$.
(в) $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$;
4. Докажите неравенство для любого n : **(а) $2^n > n$; (б) $3^n > n \cdot 2^n$.**
5. Любую ли сумму из целого числа рублей больше семи, можно уплатить без сдачи денежными купюрами по 3 и 5 рублей?
6. Несколько прямых делят плоскость на части. Докажите, что эти части можно раскрасить в 2 цвета так, что граничащие части будут иметь разный цвет.
7. На какую максимальную степень тройки делится число, десятичная запись которого состоит из $3n$ единиц?

Удвоение медианы. Задачи

- ▶ Докажите, что в прямоугольном треугольнике медиана, проведённая к гипотенузе, равна её половине.
- ▶ Докажите, что если в треугольнике медиана и биссектриса совпадают, то треугольник равнобедренный.
- ▶ В треугольнике ABC проведена медиана BM . Известно, что $2BM = AB$ и $\angle ABM = 70^\circ$. Найдите угол $\angle ABC$.