Введение в модальную логику

Александр Гагарин

НИУ ВШЭ

22.09.2023

Напоминание: классическая логика высказываний

1. **Язык.** *Множество формул* $\mathcal{L}$: пропозиционные переменные p_i, константа $\bot$, связки $\neg$ и $\wedge$.

2. **Семантика.** Оценка $\{p_i\} \to \{\bot, \top\}$ продолжается до $\mathcal{L} \to \{\bot, \top\}$

$$\mathbf{Cl}^{sem} := \{\varphi \in \mathcal{L} \text{ истинные при любой оценке}\}$$

3. **Исчисление.** $\mathbf{Cl}^{calc}$ — минимальное множество, содержанее аксиомы и замкнутое по modus ponens и подстановкам.

4. **Теорема о корректности.** $\mathbf{Cl}^{calc} \subseteq \mathbf{Cl}^{sem}$
5. **Теорема о полноте.** $\mathbf{Cl}^{sem} \subseteq \mathbf{Cl}^{calc}$

6. **Разрешимость.** $\mathbf{Cl}$ разрешима.
7. **Сложность.** $\mathbf{Cl}$ coNP-полна.

Мотивировки

- «необходимо» ($\Box$) / «возможно» ($\Diamond$)

- Какие формулы тождественно истинны — зависит от интерпретации.
- Но часто это разрешимое множество.

- «предписано» / «разрешено»
- «всегда будет» / «когда-то будет»
- «агент знает» / «агент допускает»
- «доказуемо» / «не опровержимо»

Язык

Определение

Множество модальных формул $\mathcal{ML}$:

- $\mathrm{Prop} := \{p_1, p_2, \dots\}$
- $\bot$
- $\neg\varphi$ вместе с каждой φ
- $(\varphi \wedge \psi)$ вместе с каждыми φ, ψ
- $\Box\varphi$ вместе с каждой φ («необходимо φ»)

Сокращения: $\vee, \to, \top, \Diamond$.

$$\Diamond\varphi := \neg\Box\neg\varphi \qquad (\text{«возможно } \varphi\text{»})$$

Семантика Крипке

Определение

Шкала Крипке — пара $\mathfrak{F} = (W, R)$, где

- W — *множество возможных миров*,
- $R \subseteq W \times W$ — *отношение достижимости*.

Модель Крипке — тройка $\mathfrak{M} = (W, R, V)$, где

- $V : \mathrm{Prop} \to 2^W$ — *оценка*.

Отношение $\models \subseteq W \times \mathcal{ML}$ *истинности формулы в мире*:

$$
\begin{array}{lcl}
x \models p_i & \iff & x \in V(p_i) \\
x \models \bot & \iff & \bot \\
x \models \neg\varphi & \iff & x \not\models \varphi \\
x \models \varphi \wedge \psi & \iff & (x \models \varphi) \wedge (x \models \psi) \\
x \models \Box\varphi & \iff & \forall y \in W (xRy \to y \models \varphi) \\
x \models \Diamond\varphi & \iff & \exists y \in W (xRy \wedge y \models \varphi)
\end{array}
$$

Семантика Крипке

Пример: «всегда будет»

- $W = \mathbb{R}$ (множество моментов времени)
- $R = <$ (xRy, если y — позже x)
- $x \models \Box\varphi \iff \forall y (y > x \to y \models \varphi)$

Семантика Крипке

Пример: «всегда будет»

- $W = \mathbb{R}$ (множество моментов времени)
- $R = <$ (xRy, если y — позже x)
- $x \models \Box\varphi \Longleftrightarrow \forall y (y > x \to y \models \varphi)$

- *Истинность в модели:* $\mathfrak{M} \models \varphi \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall x ((\mathfrak{M}, x) \models \varphi)$
- *Общезначимость в шкале:* $\mathfrak{F} \models \varphi \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall V : (\mathfrak{F}, V) \models \varphi$
- *Полная по Крипке логика, описываемая классом шкал*:

$$\mathrm{Log}\,\mathcal{C} := \{\varphi \mid \forall \mathfrak{F} \in \mathcal{C} : \mathfrak{F} \models \varphi\}$$

- $\mathbf{K} := \mathrm{Log}\{\text{все шкалы}\} = \{\varphi \in \mathcal{ML} \mid \forall \mathfrak{M} \forall w : (\mathfrak{M}, w) \models \varphi\}$

Семантика Крипке: свойства

(Taut) $(\mathfrak{M}, x) \models \mathbf{Cl}$

(MP) $(\mathfrak{M}, x) \models (\varphi \to \psi) \ \wedge \ (\mathfrak{M}, x) \models \varphi \Longrightarrow (\mathfrak{M}, x) \models \psi$

(Norm) $(\mathfrak{M}, x) \models \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$

(Nec) $\mathfrak{M} \models \varphi \Longrightarrow \mathfrak{M} \models \Box\varphi$

(Subst) $\mathfrak{F} \models \varphi \Longrightarrow \mathfrak{F} \models \varphi[\psi/p_i]$

Рассмотрим оценку V. Положим

$$V'(x, p_j) := \begin{cases} (\mathfrak{F}, V, x) \models \psi, & \text{если } j = i \\ V(x, p_j), & \text{если } j \neq i \end{cases}$$

Тогда

$$(\mathfrak{F}, V, x) \models \chi[\psi/p_i] \Longleftrightarrow (\mathfrak{F}, V', x) \models \chi$$

Нормальные логики

Определение

Нормальная модальная логика — множество $L \subseteq \mathcal{ML}$, которое

- содержит аксиомы логики высказываний
- содержит
$$(\mathrm{Norm}) \quad \Box(p \to q) \to (\Box p \to \Box q)$$
- замкнуто по правилам
$$(\mathrm{MP}) \quad \frac{\varphi, \varphi \to \psi}{\psi}$$
$$(\mathrm{Nec}) \quad \frac{\varphi}{\Box\varphi}$$
$$(\mathrm{Subst}) \quad \frac{\varphi}{\varphi[\psi/p_i]}$$

Логики вида $\mathrm{Log}\,\mathcal{C}$ нормальны.

Нормальные логики: примеры

- $\mathbf{K}^{kripke} := \mathrm{Log}\{$все шкалы Крипке$\}$
- $\mathbf{K}^{calc} :=$ минимальная по включению нормальная логика.

Имеется $\mathbf{K}^{calc} \subseteq \mathbf{K}^{kripke}$.

Вопрос 1: почему $\mathbf{K}^{calc} = \mathbf{K}^{kripke}$?

- $\mathbf{K} \oplus \varphi$ — минимальная нормальная логика, содержащая φ.
- $\mathbf{D} := \mathbf{K} \oplus \Box p \to \Diamond p$
- $\mathbf{T} := \mathbf{K} \oplus \Box p \to p$
- $\mathbf{K4} := \mathbf{K} \oplus \Box p \to \Box\Box p$
- $\mathbf{K5} := \mathbf{K} \oplus \Diamond p \to \Box\Diamond p$

Вопрос 2: существует ли такой класс шкал $\mathcal{C}$, что $\mathbf{K} \oplus \varphi = \mathrm{Log}\,\mathcal{C}$?

Каноническая модель

Рассмотрим нормальную логику L.
Цель. Построить модель $\mathfrak{M}_L$ т. ч.

$$\mathfrak{M}_L \models \varphi \Longleftrightarrow \varphi \in L$$

Идея. Пусть модель построена. Тогда каждое $\Gamma_x := \{\varphi \mid (\mathfrak{M}, x) \models \varphi\}$:

$$\begin{aligned} &\textit{L-непротиворечиво}: \quad && \forall \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \Gamma : \quad \neg(\varphi_1 \wedge \ldots \wedge \varphi_n) \notin L \\ &\textit{максимально}: \quad && \forall \varphi \in \mathcal{ML} : \quad \varphi \in \Gamma \vee \neg\varphi \in \Gamma \end{aligned}$$

Лемма Линденбаума: L-непротиворечивое множество содержится в максимальном L-непротиворечивом.

Следствие: $\bigcap\{$максимальные L-непротиворечивые$\} = L$.

$$
\begin{aligned}
&\textit{L-непротиворечивость:} && \forall\varphi_1,\ldots,\varphi_n\in\Gamma:\quad \neg(\varphi_1\wedge\ldots\wedge\varphi_n)\notin L\\
&\textit{максимальность:} && \forall\varphi\in\mathcal{ML}:\quad \varphi\in\Gamma\vee\neg\varphi\in\Gamma
\end{aligned}
$$

Каноническая модель $\mathfrak{M}_L$:

- $W :=$ {максимальные L-непротиворечивые множества}
- $\Gamma\ R\ \Gamma' \overset{def}{\iff} \forall\varphi\in\mathcal{ML}(\Box\varphi\in\Gamma\to\varphi\in\Gamma')$
- $V(p_i) := \{\Gamma \mid p_i\in\Gamma\}$

Утверждение: $(\mathfrak{M}_L,\Gamma)\models\varphi\iff\varphi\in\Gamma$.

1) p_i — в силу оценки
2) $\bot\notin\Gamma$
3) $\neg\varphi\in\Gamma\iff\varphi\notin\Gamma$
4) $\varphi\wedge\psi\in\Gamma\iff\varphi\in\Gamma\wedge\psi\in\Gamma$
5) $\Box\varphi\in\Gamma\iff\forall\Gamma'\in W\,(\forall\psi\in\mathcal{ML}(\Box\psi\in\Gamma\to\psi\in\Gamma')\to\varphi\in\Gamma')$

Каноническая модель

5) $\Box\varphi \in \Gamma \iff \forall \Gamma' \in W\, (\forall \psi \in \mathcal{ML}(\Box\psi \in \Gamma \to \psi \in \Gamma') \to \varphi \in \Gamma')$

($\Rightarrow$) Рассмотрим $\psi := \varphi$.
($\Leftarrow$) Пусть $\Box\varphi \notin \Gamma$. Возьмем Γ' — максимальное расширение непротиворечивого множества

$$\{\psi \mid \Box\psi \in \Gamma\} \cup \{\neg\varphi\}$$

(Для проверки непротиворечивости нужно $\bigwedge \Box\psi_i \to \Box(\bigwedge \psi_i)$)

Следствие: $\mathfrak{M}_L \models \varphi \iff \varphi \in L$.

Полнота K: $\mathbf{K}^{kripke} = \mathrm{Log}\{\text{все шкалы}\} \subseteq \mathrm{Log}\{\mathfrak{F}_{\mathbf{K}^{calc}}\} = \mathbf{K}^{calc}$.

Общий принцип: Если $\mathfrak{F}_L \models L$, то $L = \mathrm{Log}\{\mathfrak{F} \mid \mathfrak{F} \models L\}$.

Пример: логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus \Box p \to \Box\Box p$

Лемма

Шкала $\mathfrak{F}$ *транзитивна* $\iff \mathfrak{F} \models \Box p \to \Box\Box p$.

Доказательство.

$(\Longrightarrow)$

$(\Longleftarrow)$ *Пусть* $xRyRz$ *и* $\neg xRz$. *Положим* $V(p) = W \setminus \{z\}$. *Тогда* $x \models \Box p$, $x \not\models \Box\Box p$. $\Box$

Пример: логика $\mathbf{K4} = \mathbf{K} \oplus \Box p \to \Box\Box p$

Предложение

Шкала $\mathfrak{F}_{\mathbf{K4}}$ транзитивна. Следовательно,
$\mathbf{K4} = \mathrm{Log}\{$*транзитивные шкалы*$\}$.

Доказательство.

Пусть $\Gamma\ R\ \Gamma'\ R\ \Gamma''$ *и* $\Box\varphi \in \Gamma$. *Имеем* $\Box\varphi \to \Box\Box\varphi \in \mathbf{K4} \subseteq \Gamma$, *значит* $\Box\Box\varphi \in \Gamma$, *значит* $\varphi \in \Gamma$. $\square$

Аналогично:

- $\mathfrak{F} \models \Box p \to \Diamond p \iff \mathfrak{F}$ сериальна $(\forall x \exists y (xRy))$,
  $\mathbf{D} = \mathrm{Log}\{$сериальные шкалы$\}$
- $\mathfrak{F} \models \Box p \to p \iff \mathfrak{F}$ рефлексивна, $\mathbf{T} = \mathrm{Log}\{$рефлексивные шкалы$\}$
- $\mathfrak{F} \models \Diamond p \to \Box\Diamond p \iff \mathfrak{F}$ евклидова $(\forall xyz(xRy \wedge xRz \to yRz))$,
  $\mathbf{K5} = \mathrm{Log}\{$евклидовы шкалы$\}$

Формулы Салквиста

- $Const ::= \bot \mid Const \wedge Const \mid \neg Const \mid \Box Const \mid \Diamond Const$
- $Pos ::= p \mid Const \mid \Box Pos \mid \Diamond Pos \mid Pos \vee Pos \mid Pos \wedge Pos$
- $Neg ::= \neg p \mid Const \mid \Box Neg \mid \Diamond Neg \mid Neg \vee Neg \mid Neg \wedge Neg$
- $SAnt ::= \Box^n p \mid Neg \mid SAnt \vee SAnt \mid SAnt \wedge SAnt \mid \Diamond SAnt$
- $SForm ::= SAnt \to Pos \mid \Box SForm \mid SForm \wedge SForm$

- (Sahlqvist) $\mathbf{K} \oplus SForm$ полна по Крипке и соответствующее множество шкал определимо первопорядковым условием.

Фильтрация: Разрешимость **K**

- **Задача:** $\varphi \overset{?}{\in} \mathbf{K} = \mathrm{Log}\{\text{все шкалы}\}$.
- **То есть:** $\exists \mathfrak{M} : \mathfrak{M} \not\models \varphi$?
- Пусть $\varphi \notin \mathbf{K}$. Тогда найдется $\mathfrak{M} = (W, R, V) \not\models \varphi$.

- $x \sim y \overset{def}{\iff} \{\psi \in \mathrm{Sub}\,\varphi \mid x \models \psi\} = \{\psi \in \mathrm{Sub}\,\varphi \mid y \models \psi\}$
- $W' := W/{\sim}$
- $[x]R'[y] \ \overset{def}{\iff} \exists x' \in [x], y' \in [y] :\ x'Ry'$
- $[x] \models p_i \iff x \models p_i$

- $\forall \psi \in \mathrm{Sub}\,\varphi :\ [x] \models \psi \iff x \models \psi$
- $\mathfrak{M}' \not\models \varphi$

Фильтрация: Разрешимость **K**

- **Задача:** $\varphi \overset{?}{\in} \mathbf{K} = \mathrm{Log}\{\text{все шкалы}\}$.
- **То есть:** $\exists \mathfrak{M} : \mathfrak{M} \not\models \varphi$?
- Пусть $\varphi \notin \mathbf{K}$. Тогда найдется $\mathfrak{M} = (W, R, V) \not\models \varphi$.

- $x \sim y \overset{def}{\iff} \{\psi \in \mathrm{Sub}\,\varphi \mid x \models \psi\} = \{\psi \in \mathrm{Sub}\,\varphi \mid y \models \psi\}$
- $W' := W/{\sim}$
- $[x]R'[y] \overset{def}{\iff} \exists x' \in [x], y' \in [y] :\ x'Ry'$
- $[x] \models p_i \iff x \models p_i$

- $\forall \psi \in \mathrm{Sub}\,\varphi :\ [x] \models \psi \iff x \models \psi$
- $\mathfrak{M}' \not\models \varphi$

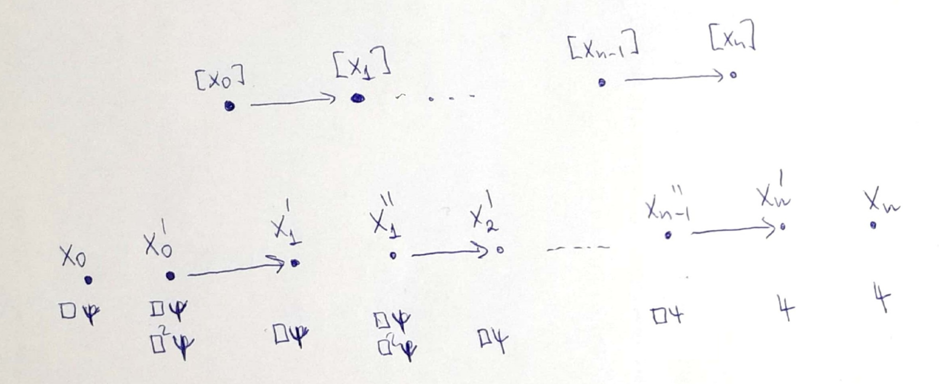
- coNEXPTIME
- на самом деле PSPACE-полна

Фильтрация: Еще примеры

- $\mathbf{D} = \mathrm{Log}\{$сериальные шкалы$\}$, $\mathbf{T} = \mathrm{Log}\{$рефлексивные шкалы$\}$ — аналогично

Фильтрация: Еще примеры

- **D** $=$ Log{сериальные шкалы}, **T** $=$ Log{рефлексивные шкалы} — аналогично
- **K4** — транзитивное замыкание. $x_0 \models \Box\psi \overset{?}{\Rightarrow} x_n \models \psi$



Фильтрация

Определение

Фильтрация модели $\mathfrak{M} = (W, R, V)$ относительно формулы $\varphi \in \mathcal{ML}$, — модель $\mathfrak{N} := (W/\sim, S, V^{\sim})$, где

- $x \sim y \to \forall \psi \in \operatorname{Sub} \varphi (x \models \psi \iff y \models \psi)$
- $xRy \to [x]S[y]$
- $[x]S[y] \to \forall \Box\psi \in \operatorname{Sub} \varphi (x \models \Box\psi \to y \models \psi)$
- $V^{\sim}([x], p_i) = V(x, p_i)$

Предложение

$(\mathfrak{M}, x) \models \psi \iff (\mathfrak{N}, [x]) \models \psi$ *для* $\psi \in \operatorname{Sub} \varphi$.

Разрешимость и финитная аппроксимируемость

Определение

Логика L *финитно аппроксимируема*, если
$L = \mathrm{Log}\{\text{класс конечных шкал}\}$.

Предложение (Harrop)

Если L финитно аппроксимируема и конечно аксиоматизируема, то L разрешима.

Полнота по Крипке и каноничность: ограничения

1) «Логики», не являющиеся нормальными (**S**, **S3**)
2) Нормальные логики, не полные по Крипке
   - (Thomason 1982) $\{\varphi \in \mathcal{ML} \mid \mathbf{K} \oplus \varphi$ полна по Крипке$\}$ не разрешимо
   - $\mathbf{T} \oplus \Box\Diamond p \to \Diamond\Box p \oplus \Box(p \to \Box p) \to (\Diamond p \to p)$ [1]
3) Полные по Крипке логики, не являющиеся каноническими
   - логика Гёделя—Лёба
     $\mathbf{GL} = \mathbf{K} \oplus \Box(\Box p \to p) \to \Box p = \mathrm{Log}\{$нётеровы строгие ЧУМы$\}$
4) Проверка каноничности может быть сложнее

- (Fine & van Benthem) Если класс шкал $\mathcal{C}$ первопорядково определим, то $\mathrm{Log}\,\mathcal{C}$ — каноническая.
- Бывает наоборот (каноничность без первопорядковой определимости)[2]

[1] Van Benthem. "Two simple incomplete modal logics." 1978.

[2] Goldblatt, Hodkinson, Venema. "Erdős Graphs Resolve Fine's Canonicity Problem." 2004.

Сложность

- Если $L \neq \mathcal{ML}$, то $L \cap \mathcal{L} = \mathbf{Cl}$, значит L coNP-трудна.
- **K5** полиномиально аппроксимируема и coNP-полна.
- (Ladner) **K**, **D**, **T** и **K4** PSPACE-полны.

Мономодальные логики, «как правило», разрешимы. Но есть:

- специально построенные неразрешимые логики

$$\mathrm{Log}\Big\{\forall xyz\,((xRy \wedge \neg zRz) \to (yRy \wedge zRy)) \wedge$$
$$\wedge\,((xRx \wedge yRy \wedge zRz \wedge xRy \wedge xRz) \to (yRx \vee zRx \vee yRz \vee zRy))\Big\} =$$
$$= \mathbf{K} \oplus \Box(\Box p \to p) \oplus \Box p \to (p \vee \Box^2 p) \oplus$$
$$\oplus\, \Box(p \to (\Box(q \to \Diamond(p \vee r)) \vee \Box(r \to \Diamond(p \vee q))))$$ [3]

- логики, разрешимость которых неизвестна
  - $\mathbf{K} \oplus \Box^2 p \to \Box^3 p$
- неразрешимые полимодальные логики
  - $\mathbf{K4} \times \mathbf{K4}$

[3] Kieroński, Michaliszyn, Otop. Modal Logics Definable by Universal Three-Variable Formulas, 2011.

Модальная определимость

Задача: Можно ли данный класс $\mathcal{C}$ представить как $\{\mathfrak{F} \mid \mathfrak{F} \models \varphi\}$ (или хотя бы $\{\mathfrak{F} \mid \mathfrak{F} \models L\}$)?

Инварианты модальных формул:

- дизъюнктные объединения: если $\mathfrak{F}_i \models \varphi$, то $\bigsqcup \mathfrak{F}_i \models \varphi$.
- порожденные (замкнутые вверх по R) подшкалы.
- p-морфные образы.

Определение

$f : \mathfrak{F} \twoheadrightarrow \mathfrak{F}'$ — *p-морфизм*, если

- $xRy \to f(x)R'f(y)$, и
- $x'R'y' \to \forall x \in f^{-1}(x') \exists y \in f^{-1}(y') : xRy$.

Пример: $(\mathbb{Z}_{\geqslant 0}, <) \to \circ$ — p-морфизм. Следовательно, $\{$иррефлексивные шкалы $: \forall x(\neg xRx)\}$ модально не определим.

Модальная определимость

Теорема 1 (van Benthem)

Первопорядково определимый класс $\mathcal{C} := \{\mathfrak{F} \mid \mathfrak{F} \models \Phi\}$ *замкнут по дизъюнктным объединениям, порождннным подмоделям и p-морфным образам* $\iff$ Φ *эквивалентна формуле вида*

(*) $\forall x\, \Psi(x)$, *где* Ψ *составлено из* $xR^n y$ *и* $x = y$ *при помощи связок* $\wedge$, $\vee$, $\forall y \in R(x)$ *и* $\exists y \in R(x)$.

Теорема 2 (Kracht)

Пусть в каждой атомарной формуле в (*) хоть одна из двух переменных определена квантором $\forall$, *не лежащем внутри никакоого квантора* $\exists$. *Тогда* $\mathcal{C}$ *модально определим.*

Пример: Класс $\{\mathfrak{F} \mid \mathfrak{F} \models \forall x \exists y (xRy \wedge yRy)\}$ замкнут по 3 операциям, но не модально определим (формулой Салквиста).

Неразрешимость свойств

Теорема (Чагров 1990)

Неразрешимо множество таких $\varphi \in \mathcal{ML}$, *что* $\mathbf{K} \oplus \varphi$ *(или даже* $\mathbf{GL} \oplus \varphi$*)*
а) полна по Крипке;
б) разрешима;
в) финитно аппроксимируема.