Произведения хорновых модальных логик

Александр Гагарин

Научный руководитель: В. Б. Шехтман

24 мая 2024

2-модальная логика

- $\mathbf{ML}_2$: $\quad \varphi ::= p \mid \bot \mid \varphi \to \varphi \mid \Box_1\varphi \mid \Box_2\varphi$
- $\Diamond_i\varphi := \neg\Box_i\neg\varphi$
- (нормальная) логика: содержит **Cl** и $\Box_i(p \to q) \to (\Box_i p \to \Box_i q)$, замкнута по *Subst*, *MP* и $\varphi/\Box_i\varphi$

- Шкала Крипке: $\mathfrak{F} = (W, R_1, R_2)$, где $R_i \subseteq W^2$
- Модель Крипке: $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$, где $V : Prop \to 2^W$
- $(\mathfrak{M}, x) \models p \iff x \in V(p)$
- $(\mathfrak{M}, x) \not\models \bot$
- $(\mathfrak{M}, x) \models \varphi \to \psi \iff ((\mathfrak{M}, x) \models \varphi) \to ((\mathfrak{M}, x) \models \psi)$
- $(\mathfrak{M}, x) \models \Box_i\varphi \iff \forall y \in W\,(xR_iy \to (\mathfrak{M}, y) \models \varphi)$

- $\mathfrak{F} \models \varphi \iff \forall V\, \forall x\, (\mathfrak{F}, V, x) \models \varphi$
- $\mathrm{Log}\,\mathcal{C} := \{\varphi \;:\; \forall \mathfrak{F} \in \mathcal{C}\,(\mathfrak{F} \models \varphi)\}$

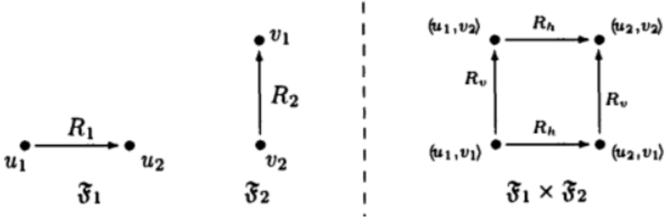
1-модальная логика

- **ML** : $\varphi ::= p \mid \bot \mid \varphi \to \varphi \mid \Box\varphi$
- Шкала Крипке: $\mathfrak{F} = (W, R)$

Произведения

- *Произведение* шкал Крипке:

$$(W_1, R_1) \times (W_2, R_2) := (W_1 \times W_2, R_1', R_2'), \quad \text{где}$$
$$(x_1, x_2) R_1' (y_1, y_2) \iff x_1 R_1 y_1 \wedge x_2 = y_2$$
$$(x_1, x_2) R_2' (y_1, y_2) \iff x_1 = y_1 \wedge x_2 R y_2$$



- *Произведение* полных по Крипке логик L_1 и L_2:

$$L_1 \times L_2 := \mathrm{Log}(\{\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \;:\; \mathfrak{F}_1 \models L_1, \mathfrak{F}_2 \models L_2\}).$$

Примеры: $\mathbf{K} \times \mathbf{K} = \mathrm{Log}\{\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2\}$,
$\mathbf{K4} \times \mathbf{K4} = \mathrm{Log}\,\{\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \;:\; \mathfrak{F}_i \text{ транзитивны}\}$

Произведения: известные результаты

Теорема (Gabbay & Shehtman 1998)

$\mathbf{S5} \times (\mathbf{K} + \Box p \to \Box^n p)$ *разрешима (например,* $\mathbf{S5} \times \mathbf{K}$, $\mathbf{S5} \times \mathbf{K4}$*)*

Теорема (Shehtman 2005 “filtration via bisimulation”)

$\mathbf{K} \times (\mathbf{K} + \Box p \to \Box^n p)$ *разрешима (например,* $\mathbf{K} \times \mathbf{K}$, $\mathbf{K} \times \mathbf{K4}$*)*

Теорема (Gabelaia et al. 2005)

Let $\mathcal{C}_1$ *and* $\mathcal{C}_2$ *be classes of transitive frames both containing frames of infinite depth. Then* $\mathrm{Log}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ *is undecidable.*
В частности, $\mathbf{K4} \times \mathbf{K4}$ *неразрешима.*

PT-логики

- PT-логика:

$$\mathbf{K} + \Diamond^n \Box p \to \Box^m p = \mathrm{Log}\,\{(W, R) \;:\; \Phi\}, \text{ где}$$

$$\Phi := \forall xyz\,(xR^n y \wedge xR^m z \to yRz)$$

- Примеры:
  - $\mathbf{T} = \mathbf{K} + \Box p \to p = \mathrm{Log}\{\text{рефлексивные шкалы}\}$
  - $\mathbf{KB} = \mathbf{K} + \Diamond\Box p \to p = \mathrm{Log}\{\text{симметричные шкалы}\}$
  - $\mathbf{K4} = \mathbf{K} + \Box p \to \Box^2 p = \mathrm{Log}\{\text{транзитивные шкалы}\}$
  - $\mathbf{K5} = \Diamond\Box p \to \Box p = \mathrm{Log}\{\text{евклидовы шкалы}\}$

- Φ–замыкание (W, R):

$$R_0 := R, \qquad R_{k+1} := R_k \cup (R_k^{-n} \circ R_k^m), \quad R^\Phi := \bigcup_{k \geq 0} R_k$$

Основные утверждения

Теорема 1

$\mathbf{K} + \Diamond^n \Box p \to \Box^m p$ *финитно аппроксимируема*

Теорема 2

$(\mathbf{K} + \Diamond^{n_1} \Box p \to \Box^{m_1} p) \times (\mathbf{K} + \Diamond^{n_2} \Box p \to \Box^{m_2} p)$ *финитно аппроксимируема, если* $n_1 \neq 0$ *или* $m_1 \leq 1$.

Теорема 3

$(\mathbf{K} + \Box p \to \Box^{m_1} p) \times (\mathbf{K} + \Box p \to \Box^{m_2} p)$ *неразрешима для* $m_1, m_2 \geq 2$.

Замечание: обобщается до *унимодальных хорновых логик*:

$$\mathrm{Log}\left\{(W, R) \ : \ \bigwedge \forall \vec{x} \left(\bigwedge x_i R x_j \to x_{i_0} R y_{j_0}\right)\right\}$$

Неразрешимые произведения

Теорема (Gabelaia et al. 2005)

Let $\mathcal{C}_1$ and $\mathcal{C}_2$ be classes of transitive frames both containing frames of infinite depth. Then $\mathrm{Log}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$ *is undecidable.*

Теорема 3

Если $m_1, m_2 \geq 2$, то $(\mathbf{K} + \Box p \to \Box^{m_1} p) \times (\mathbf{K} + \Box p \to \Box^{m_2} p)$ *неразрешима*

Proof.

Рассмотреть $\mathrm{Log}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2)$, *где*

$$\mathcal{C}_\rangle := \mathrm{Log}\left\{(W, R^{m_i - 1}) \;:\; (W, R) \models \Phi_{0,m}\right\}$$

Тогда замена $\Box_i / \Box_i^{m_i}$ *задает редукцию*
$\mathrm{Log}(\mathcal{C}_1 \times \mathcal{C}_2) \to (\mathbf{K} + \Box p \to \Box^{m_1} p) \times (\mathbf{K} + \Box p \to \Box^{m_2} p)$. $\Box$

Разрешимые произведения: план

Теорема 2

Произведение $(\mathbf{K} + \Diamond^{n_1}\Box p \to \Box^{m_1} p) \times (\mathbf{K} + \Diamond^{n_2}\Box p \to \Box^{m_2} p)$ *финитно аппроксимируемо, если* $n_1 \neq 0$ *или* $m_1 \leq 1$.

Доказательство аналогично:

Теорема (Shehtman 2005 “filtration via bisimulation”)

$\mathbf{K} \times (\mathbf{K} + \Box p \to \Box^n p)$ *разрешима*

План:

1. $L_1 \times L_2 = \mathrm{Log}\left\{\mathfrak{T}_1^{\Phi_1} \times \mathfrak{T}_2^{\Phi_2} \ : \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2 \text{ — деревья}\right\}$ (Gabbay, Shehtman 1998)
2. Если $n_i = m_i = 0$ или $n_i = 1 \wedge m_i = 0$ или $m_i - n_i = 1$, то можно считать, что $\mathfrak{T}_i$ конечной высоты
3. Фильтрация (“filtration via bisimulation”)

Коммутатор и замыкания деревьев

В $L_1 \times L_2 = \mathrm{Log}\,\{\mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2 \;:\; \mathfrak{F}_1 \models L_1, \mathfrak{F}_2 \models L_2\}$ лежат:

- $L_1 * L_2 := L_1[\Box/\Box_1] + L_2[\Box/\Box_2]$ (*соединение*)

- Пусть $(W, R_1, R_2) = \mathfrak{F} = \mathfrak{F}_1 \times \mathfrak{F}_2$. Тогда:
  - $R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1$ ($\Longleftrightarrow \mathfrak{F} \models \Box_1\Box_2 p \leftrightarrow \Box_2\Box_1 p := \mathbf{com}$)
  - $R_1 \circ R_2^{-1} \subseteq R_2^{-1} \circ R_1$ ($\Longleftrightarrow \mathfrak{F} \models \Diamond_1\Box_2 p \to \Box_2\Diamond_1 p =: \mathbf{chr}$)
- $[L_1; L_2] := (L_1 * L_2) + \mathbf{com} + \mathbf{chr}$ (*коммутатор*)

Лемма (Gabbay & Shehtman 1998)

Если L_1, L_2 — PT-логики, то

$$[L_1; L_2] = L_1 \times L_2 = \mathrm{Log}\left\{\mathfrak{T}_1^{\Phi_1} \times \mathfrak{T}_2^{\Phi_2} \;:\; \mathfrak{T}_1,\ \mathfrak{T}_2 \text{ — деревья}\right\}$$

Коммутатор и замыкания деревьев

Определение

Отображение $f : (W, R_1, R_2) \twoheadrightarrow (W', R_1', R_2')$ — *p-морфизм*, если

- $xR_iy \Rightarrow f(x)R_i'f(y)$
- $f(x)R_i'b \Rightarrow \exists y\, (f(y) = b \wedge xR_iy)$

Лемма

Если $x \in V(p) \iff f(x) \in V'(p)$, *то* $\mathfrak{M} \models \varphi \iff \mathfrak{M}' \models \varphi$.

Лемма (Gabbay & Shehtman 1998)

2-шкала $\mathfrak{F}$ *корневая, не более чем счетна, и* $\mathfrak{F} \models \mathbf{com} + \mathbf{chr}$. *Тогда существует p-морфизм* $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2 \twoheadrightarrow \mathfrak{F}$, *где* $\mathfrak{T}_i$ *— некоторые деревья.*

Коммутатор и замыкания деревьев

Лемма (Gabbay & Shehtman 1998)

2-шкала $\mathfrak{F}$ корневая, не более чем счетна, и $\mathfrak{F} \models \mathbf{com} + \mathbf{chr}$. Тогда существует p-морфизм $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2 \twoheadrightarrow \mathfrak{F}$, где $\mathfrak{T}_i$ — некоторые деревья.

Лемма (Gabbay & Shehtman 1998)

Если L_1, L_2 — PT-логики, то

$$[L_1; L_2] = L_1 \times L_2 = \mathrm{Log}\left\{\mathfrak{T}_1^{\Phi_1} \times \mathfrak{T}_2^{\Phi_2} \;:\; \mathfrak{T}_1, \mathfrak{T}_2 \text{ — деревья}\right\}$$

Proof.

Пусть $\varphi \notin [L_1; L_2]$. Коммутатор полон по Крипке, тогда $(\mathfrak{F}, V, w) \not\models \varphi$ и $\mathfrak{F} \models [L_1; L_2]$. По т. Лёвенгейма — Сколема н.у.о. $\mathfrak{F}$ не более чем счетна, и н.у.о. $\mathfrak{F}$ порождена w. Тогда p-морфизм $\mathfrak{T}_1 \times \mathfrak{T}_2 \twoheadrightarrow \mathfrak{F}$ является p-морфизмом $\mathfrak{T}_1^{\Phi_1} \times \mathfrak{T}_2^{\Phi_2} \twoheadrightarrow \mathfrak{F}$. □

Фильтрация

Определение

Фильтрация модели $\mathfrak{M} = (W, R_1, R_2, V)$ относительно формулы $\chi \in \mathbf{ML}_2$ — модель $\mathfrak{N} := (W/{\sim}, S_1, S_2, V^{\sim})$, где

- $x \sim y \to \forall \varphi \in \operatorname{Sub}\chi (x \models \varphi \iff y \models \varphi)$
- $xR_iy \to [x]S_i[y]$
- $[x]S_i[y] \to \forall \Box_i\varphi \in \operatorname{Sub}\chi (x \models \Box_i\varphi \to y \models \varphi)$
- $p \in V^{\sim}([x]) \iff p \in V(x)$ для $p \in \operatorname{Sub}\chi$

Лемма

$(\mathfrak{M}, x) \models \varphi \iff (\mathfrak{N}, [x]) \models \varphi$ *для* $\varphi \in \operatorname{Sub}\chi$.

Определение

$(L, \mathfrak{F})$, где $\mathfrak{F} \models L$, *допускает фильтрацию* если для любой $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ и любой χ и $\mathfrak{M} = (\mathfrak{F}, V)$ существует $\mathfrak{N} = (\mathfrak{G}, V^{\sim})$ — конечная χ-фильтрация $(\mathfrak{F}, V)$ т. ч. $\mathfrak{G} \models L$.

Фильтрация для соединения

Лемма

Пусть L_1, L_2 — PT-логики, (W, R_1, R_2) — шкала. Если $(L_i, (W, R_i))$ обе допускают фильтрацию, то $(L_1 * L_2, (W, R_1, R_2))$ допускает фильтрацию.

Proof.

Фиксируем $\mathfrak{M} = (W, R_1, R_2, V)$ *и* χ. *Положим*

$$\chi_i := \bigwedge (\{p_\varphi \ : \ \varphi \in \mathrm{Sub}\,\chi\} \cup \{\Box p_\varphi \ : \ \Box_i \varphi \in \mathrm{Sub}\,\chi\}),$$
$$V_i(p_\varphi) := \{w \in W \ : \ (\mathfrak{M}, w) \models \varphi\}.$$

Пусть $(W/{\sim_i}, (R_i^{\sim_i})^{\Phi_i}, V_i^{\sim_i})$ — χ_i*-фильтрация* (W, R_i, V). *Положим* $\sim \, := \, \sim_1 \cap \sim_2$.
Тогда $(W/{\sim}, (R_1^{\sim})^{\Phi_1}, (R_2^{\sim})^{\Phi_2}, V^{\sim})$ *это* χ*-фильтрация* $\mathfrak{M}$. $\square$

«Фильтрация через бисимуляцию» для коммутатора

- Хочется $(R_1, R_2) \models \mathbf{com} \wedge \mathbf{chr} \Rightarrow (R_1^{\sim}, R_2^{\sim}) \models \mathbf{com} \wedge \mathbf{chr} \Rightarrow ((R_1^{\sim})^{\Phi_1}, (R_2^{\sim})^{\Phi_2}) \models \mathbf{com} \wedge \mathbf{chr}$.
- $SCOM := (R_1 \circ R_2 = R_2 \circ R_1) \wedge (R_1 \circ R_2^{-1} = R_2^{-1} \circ R_1)$
- Хочется $(R_1, R_2) \models SCOM \Longrightarrow (R_1^{\sim}, R_2^{\sim}) \models SCOM \Longrightarrow ((R_1^{\sim})^{\Phi_1}, (R_2^{\sim})^{\Phi_2}) \models SCOM$.

Лемма

$(S_1, S_2) \models SCOM \Rightarrow (S_1^{\Phi_1}, S_2^{\Phi_2}) \models SCOM$

Proof.

$(S_1^{-n} \circ S_1^m) \circ S_2 = S_2 \circ (S_1^{-n} \circ S_1^m)$. $\square$

«Фильтрация через бисимуляцию» для коммутатора

Лемма

Если $(R_1, R_2) \models SCOM$ *и* $R_1 \circ \sim \; = \; \sim \circ R_1$, *то* $(R_1^{\sim}, R_2^{\sim}) \models SCOM$.

Proof.

$(\sim \circ R_1 \circ \sim) \circ (\sim \circ R_2 \circ \sim) \stackrel{?}{=} (\sim \circ R_2 \circ \sim) \circ (\sim \circ R_1 \circ \sim)$ $\square$

- Возьмем $\approx \; := \bigcup \{ \approx \; \subseteq \; \sim \; : \; (\sim, R_1) \models SCOM \}$. Итого:

Предложение

Пусть (W, R_1, R_2) *такова, что*
1) $(W, R_i) \models \Phi$ *и* $(L_i, (W, R_i))$ *допускает фильтрацию*
2) $(R_1, R_2) \models SCOM$
3) Если $|W/{\sim}| < \infty$, *то существует* $\approx \; \subset \; \sim$ *т. ч.* $|W/{\approx}| < \infty$ *и*
$\approx \circ R_1 = R_1 \circ \approx$.
Тогда $(L_1 \times L_2; (W, R_1, R_2))$ *допускает фильтрацию.*

Свойство (ATB)

Определение

(W, R) *удовлетворяет (ATB)*, если для любого $|W/{\sim}| < \infty$ существует $\approx$ т. ч. $|W/{\approx}| < \infty$ и $\approx \circ R = R \circ \approx$.

- ATB $\iff$ Если V — оценка конечного набора переменных, то существует p-морфизм $(W, R, R^{-1}, V) \twoheadrightarrow (W', R', R'^{-1}, V')$, где W' конечно.

Лемма

Если $\mathfrak{F}$ ATB, то $\mathfrak{F}^{\Phi}$ ATB

Лемма

Если $\mathfrak{F}$ ATB, то $\mathfrak{F}^{\sqcup\kappa}$ ATB

Что осталось проверить

Имеем $(W, R_1, R_2) = \mathfrak{T}_1^{\Phi_1} \times \mathfrak{T}_2^{\Phi_2}$, где $\Phi_i = \forall xyz(xR^{n_i}y \wedge xR^{m_i}z \to yRz)$ и

- $\mathfrak{T}_1$ конечной высоты ($n_1 = m_1 = 0$ или $n_1 = 1 \wedge m_1 = 0$ или $m_1 - n_1 = 1$), или
- $n_1 \geq 2 \wedge m_2 \neq n_1 + 1$ или $n_1 = 1 \wedge m_1 \geq 1 \wedge m_1 \neq 2$

- $\mathfrak{T}_2$ конечной высоты ($n_2 = m_2 = 0$ или $n_i = 2 \wedge m_2 = 0$ или $m_2 - n_2 = 1$), или
- $n_2 \geq 2 \wedge m_2 \neq n_2 + 1$ или $n_2 = 1 \wedge m_2 \geq 1 \wedge m_2 \neq 2$
- $n_2 = 0 \wedge m_2 \geq 2$

Хотим:

- $(L_1, (W, R_1))$ допускает фильтрацию
- $(L_2, (W, R_2))$ допускает фильтрацию
- Если $|W/{\sim}| < \infty$, то существует $\approx \subset \sim$ т. ч. $|W/{\approx}| < \infty$ и $\approx \circ R_1 = R_1 \circ \approx$.

Свойство (ATB)

Лемма

Если $\mathfrak{F} = (W, R)$ *ATB,* L *— PT-логика и* $L \models \mathfrak{F}$*, то* $(L, \mathfrak{F})$ *допускает фильтрацию*

Proof.

$$x \sim y \overset{def}{\iff} \forall \varphi \in \mathrm{Sub}\,\chi(x \models \varphi \iff y \models \varphi)$$

Выберем $\approx$*, тогда* $(W, R, R^{-1}) \twoheadrightarrow (W/\approx, R^{\approx}, R^{\approx -1})$ *это p-морфизм, тогда* $(W, R, R^{-1}) \twoheadrightarrow (W/\approx, (R^{\approx})^{\Phi}, (R^{\approx \Phi})^{-1})$ *тоже p-морфизм, а значит фильтрация.* $\square$

Желаемые свойства

Лемма (Shehtman 2005)

Если $\mathfrak{T}$ — дерево конечной высоты, то $\mathfrak{T}$ АТВ

Лемма

Пусть $\Phi = \forall xyz\,(xR^n y \wedge xR^m z \to yRz)$, *где* $n \geq 2$ *или* $n = 1 \wedge m \geq 1$, *причем* $m - n \neq 1$, *и пусть* $\mathfrak{T}$ — *дерево. Тогда* $\mathfrak{T}^\Phi$ *АТВ*

Лемма (Gabbay 1972)

$(\mathbf{K} + \Box p \to \Box^n p, \mathfrak{F})$ *допускает фильтрацию (для любой* $\mathfrak{F}$*)*

Добавление: хорновы логики

Унимодальная хорнова логика:

$$\mathrm{Log}\left\{(W,R)\ :\ \bigwedge \forall \overrightarrow{x}\left(\bigwedge x_i R x_j \to x_{i_0} R y_{j_0}\right)\right\}$$

Теорема 1' (Michaliszyn & Otop 2012)

Хорновы логики разрешимы.

Теорема 2'

Если L_1, L_2 хорновы и $L_1 \notin [\mathbf{K};\mathbf{S4}] \setminus [\mathbf{K};\mathbf{T}]$, то $L_1 \times L_2$ финитно финитно аппроксимируема.

Теорема 3'

Если L_1, L_2 хорновы и $L_1, L_2 \in [\mathbf{K};\mathbf{S4}] \setminus [\mathbf{K};\mathbf{T}]$, то $L_1 \times L_2$ неразрешима и не финитно аппроксимируема.

Ссылки

[1] Dov M. Gabbay. "A General Filtration Method for Modal Logics". In: *Journal of Philosophical Logic* 1.1 (1972), pp. 29–34.

[2] Dov M. Gabbay and Valentin Shehtman. "Products of Modal Logics, Part 1". In: *Logic Journal of the IGPL* 6.1 (Jan. 1998), pp. 73–146.

[3] David Gabelaia et al. "Products of 'transitive' modal logics". In: *Journal of Symbolic Logic* 70.3 (Sept. 2005), pp. 993–1021.

[4] Edith Hemaspaandra and Henning Schnoor. "On the Complexity of Elementary Modal Logics". In: *Proceedings of the 25th International Symposium on Theoretical Aspects of Computer Science, STACS 2008*, pp. 349–360.

[5] Jakub Michaliszyn, Jan Otop, and Emanuel Kieroński. "On the Decidability of Elementary Modal Logics". In: vol. 17. 1. New York, NY, USA: Association for Computing Machinery, Sept. 2015.

[6] Valentin Shehtman. "Filtration Via Bisimulation". In: *Advances in Modal Logic*. Vol. 5. 2005, pp. 289–308.