РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ имени А.А. Харкевича

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Кодирование проблем укладки домино логическими средствами

Михаил Рыбаков[1] и Дарья Серова[2]
[1]ИППИ РАН, [1,2]ТвГУ, [1]ВШЭ

Однодневный семинар по математической логике

Москва

24 июня 2024 года

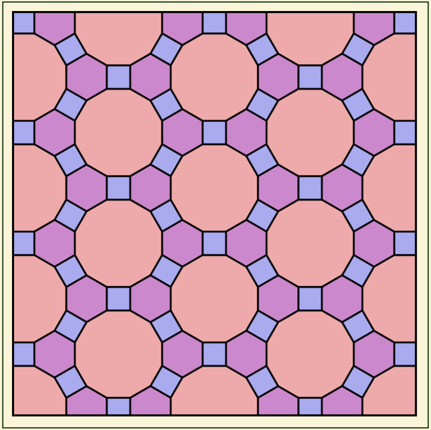
О чём доклад?

Цель доклада:

- рассказать о задачах укладки плиток (домино) как о методе простого описания алгоритмических проблем;
- показать на примере, как с помощью этого метода можно доказать сложную теорему в логике.

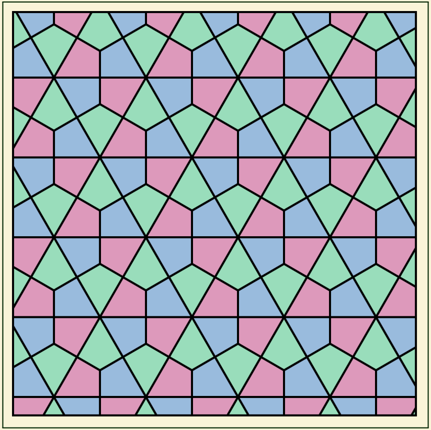
Что такое плитки и укладка

Имея набор *типов плиток*, нужно замостить определенную часть плоскости плитками этих типов:

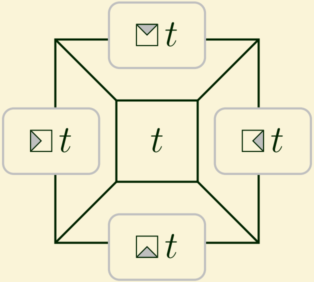


Что такое плитки и укладка

Имея набор *типов плиток*, нужно замостить определенную часть плоскости плитками этих типов:

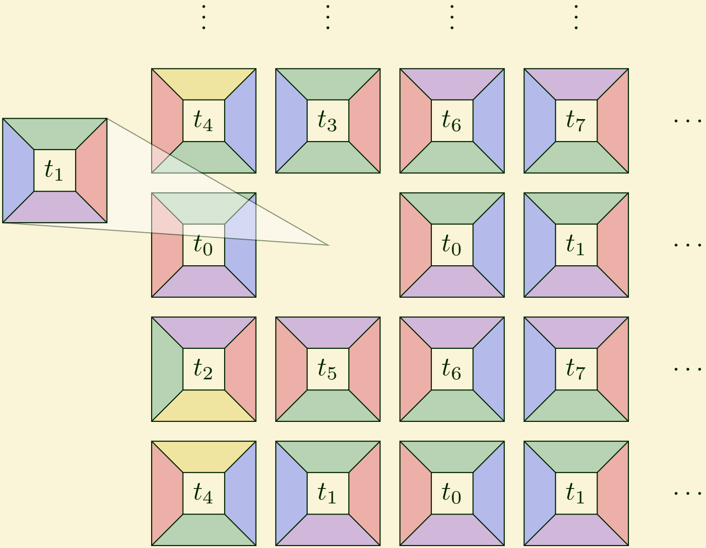


Рассматриваем задачу замощения квадратами одного размера. *Плитка домино* — это цветной квадрат 1×1 с фиксированой оринтацией сторон:

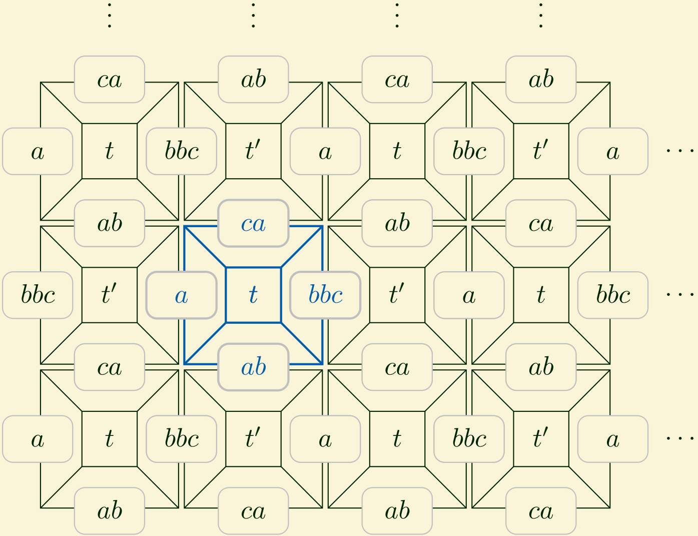


Тип плитки t состоит из *меток* (*цветов*) для каждой стороны плитки. Мы будем писать t, t, t, и t для меток, соответсвенно, слева, справа, сверху и снизу.

Пример «цветной» укладки



Пример укладки плиток с метками



Домино и алгоритмическая выразительность

В зависимости от условий, проблемы домино могут быть:

- неразрешимыми и сильно неразрешимыми;
- полными в классах сложности — в PSPACE, EXPTIME и др.

Наша цель:

Мы сформулируем проблему домино, которая позволит «уловить» понятие рекурсивной неотделимости множеств, а затем используем её, чтобы доказать усиленный вариант теоремы Трахтенброта.

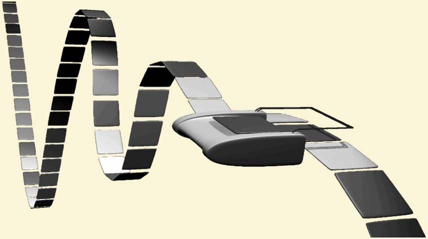
Наш план:

- понятие рекурсивной неотделимости множеств;
- моделирование рекурсивной неотделимости машиной Тьюринга;
- моделирование машины Тьюринга с помощью домино;
- моделирование домино в языке логики предикатов;
- теорема Трахтенброта с усилениями.

Машины Тьюринга: напоминание

Машину Тьюринга обычно ассоциируют с *лентой*, состоящей из *ячеек*, в которых могут быть записаны *символы*. По ленте двигается *головка*; она может:

- считывать символ,
- записывать символ,
- смещаться.



Лента ограничена слева, в крайней ячейке записан символ # (*граничный маркер*), который запрещено стирать.
Справа лента потенциально бесконечна.
У машины имеется внутренняя память — конечное множество *состояний*.
Управление происходит с помощью *команд* (инструкций).
Команда имеет вид $qa \to q'a'\Delta$, где a, a' — символы, q, q' — состояния, $\Delta \in \{L, S, R\}$ — сдвиг.
Машина Тьюринга: $M = (\Sigma, Q, q_0, F, P)$.

Разрешимость и рекурсивная перечислимость

Множество слов (язык) L в некотором алфавите $\mathcal{A}$ называется *разрешимым* (*рекурсивным*), если характеристическая функция χ_L множества L вычислима.

Уточнение: $\chi_L(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in L, \\ 0, & \text{если } x \notin L. \end{cases}$

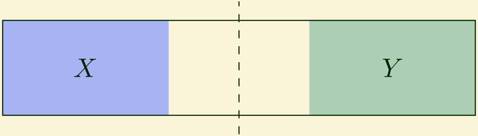
Здесь $x \in \mathcal{A}^*$.

Множество слов (язык) L в некотором алфавите $\mathcal{A}$ называется *рекурсивно перечислимым*, если существует перечисляющая его вычислимая функция $f\colon \mathbb{N} \to \mathcal{A}^*$, т.е. $L = \{f(n) : n \in \mathbb{N}\}$, или же если $L = \varnothing$.

Рекурсивно отделимые множества

Пусть X и Y — такие подмножества множества $\mathbb{N}$, что $X \cap Y = \varnothing$. Тогда X и Y называются *рекурсивно отделимыми*, если существует такое рекурсивное подмножество Z множества $\mathbb{N}$, что $X \subseteq Z$ и $Y \cap Z = \varnothing$; если такого Z нет, то X и Y назваются *рекурсивно неотделимыми*.

Пусть $X \subseteq Y$. Тогда X и Y называем *рекурсивно различимыми*, если существует такое рекурсивное подмножество Z множества $\mathbb{N}$, что $X \subseteq Z \subseteq Y$; если такого Z нет, то X и Y называем *рекурсвино неразличимыми*.



Заметим, что

$$
\begin{array}{lcl}
X \text{ и } Y \text{ рек. различимы} & \iff & X \text{ и } \mathbb{N} \setminus Y \text{ рек. отделимы;} \\
X \text{ и } Y \text{ рек. отделимы} & \iff & X \text{ и } \mathbb{N} \setminus Y \text{ рек. различимы.}
\end{array}
$$

Шаг 1: Фиксируем машины Тьюринга

Зафиксируем рекурсивно перечислимые $\mathbb{X}$ и $\mathbb{Y}$, которые рекурсивно неотделимы (такие существуют). Тогда существует вычислимая функция $f_{\mathbb{X}\mathbb{Y}}\colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, отделяющая $\mathbb{X}$ от $\mathbb{Y}$:

$$f_{\mathbb{X}\mathbb{Y}}(x) \quad = \quad \begin{cases} \hfill 0, & \text{если } x \in \mathbb{X}; \\ \hfill 1, & \text{если } x \in \mathbb{Y}; \\ \text{не опр.} & \text{иначе.} \end{cases}$$

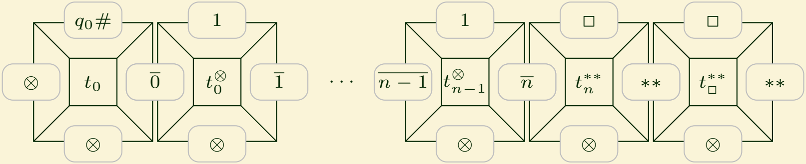
Пусть $M_0 = \langle \Sigma_0, Q_0, q_0, F_0, \delta_0 \rangle$ — машина Тьюринга, вычисляющая эту функцию. Счтаем, что $F_0 = \{q_{\mathbb{X}}, q_{\mathbb{Y}}\}$, причём

- если $m \in \mathbb{X}$, то M_0 заканчивает работу в $q_{\mathbb{X}}$;
- если $m \in \mathbb{Y}$, то M_0 заканчивает работу в $q_{\mathbb{Y}}$;
- если $m \notin \mathbb{X} \cup \mathbb{Y}$, то M_0 не заканчивает работу.

Добавим в M_0 фиктивные комнады:

$$q_{\mathbb{X}}\# \to q_{\mathbb{X}}\#S \ \text{ и } \ q_{\mathbb{Y}}\# \to q_{\mathbb{Y}}\#S.$$

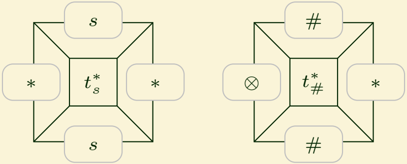
Берём следующие типы плиток:



Для каждого n набор плиток $t_0^{\otimes}, \ldots, t_{n-1}^{\otimes}, t_n^{**}$ — свой.

Шаг 2: Сохранение символа

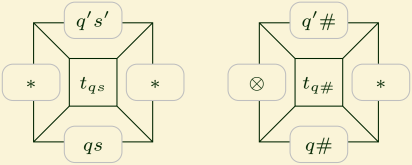
Следующие типы плиток позволяют сохранить символ в ряду выше:



В первой плитке $s \neq \#$.

Шаг 2: Инструкция с $\Delta = S$

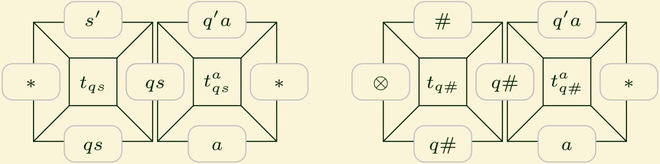
Тип плиток для инструкций $\delta_0 \colon qs \mapsto q's'S$ and $\delta_0 \colon q\# \mapsto q'\#S$:



Эти типы плиток позволяют просто заменить символ и состояние в соответствии с инструкцией.

Шаг 2: Инструкция с $\Delta = R$

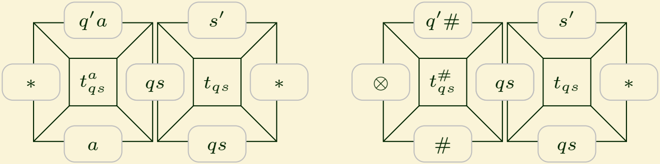
Тип плиток для инструкций $\delta_0\colon qs \mapsto q's'R$ и $\delta_0\colon q\# \mapsto q'\#R$:



Эти типы плиток позволяют заменить символ и состояние в соответствии с инструкцией, а затем осуществить смещение каретки вправо.

Шаг 2: Инструкция с $\Delta = L$

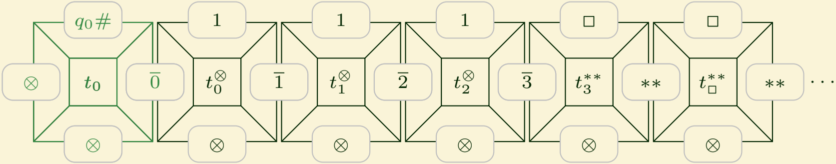
Тип плиток для инструкций $\delta_0 \colon qs \mapsto q's'L$:



Эти типы плиток позволяют заменить символ и состояние в соответствии с инструкцией, а затем осуществить смещение каретки влево.

Пусть $T_n = \{t^n_0, \ldots, t^n_{k_n}\}$ — набор типов плиток, описанных для n. Считаем, что $t_0 = t^n_0$, $t_1 = t_{q_{\mathbb{X}}\#}$, $t_2 = t_{q_{\mathbb{Y}}\#}$.

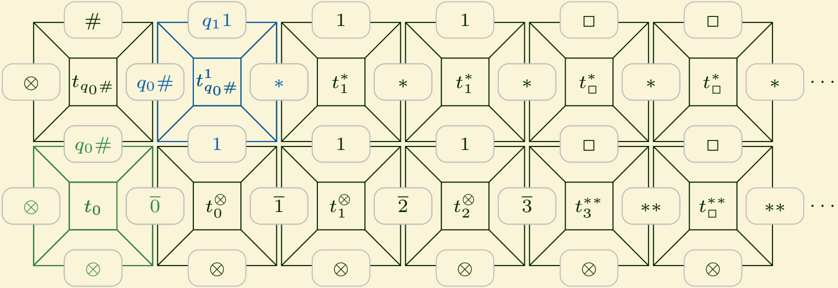
инструкция: $q_0\# \to q_1\#R$



Начальная конфигурация со входом 3 Смотрите на верхние метки

Шаг 2: Пример замощения плитками из T_n

инструкция: $q_1 1 \to q_2 \Box S$

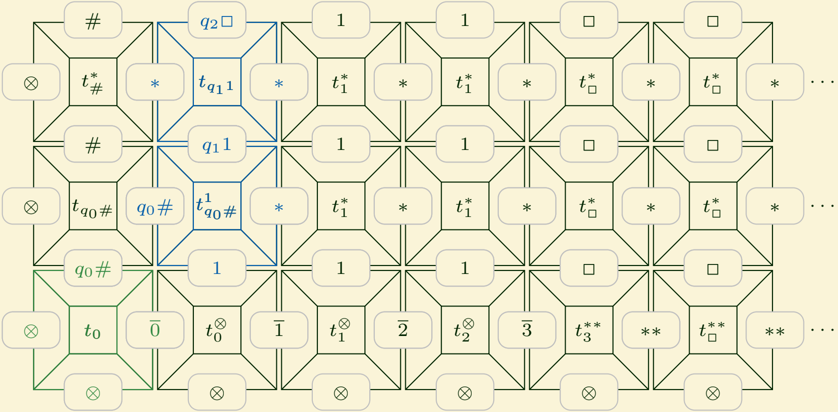


Начальная конфигурация со входом 3

Смотрите на верхние метки

Шаг 2: Пример замощения плитками из T_n

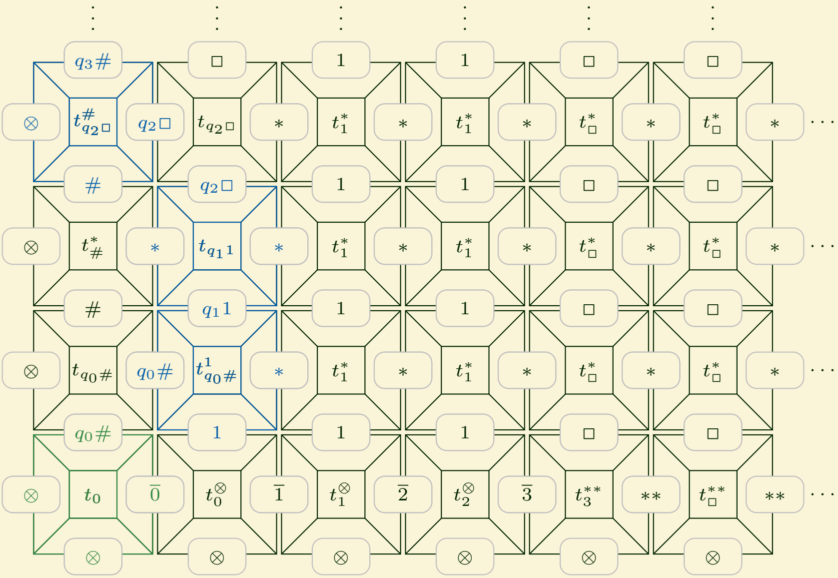
инструкция: $q_2\square \to q_3\square L$



Начальная конфигурация со входом 3

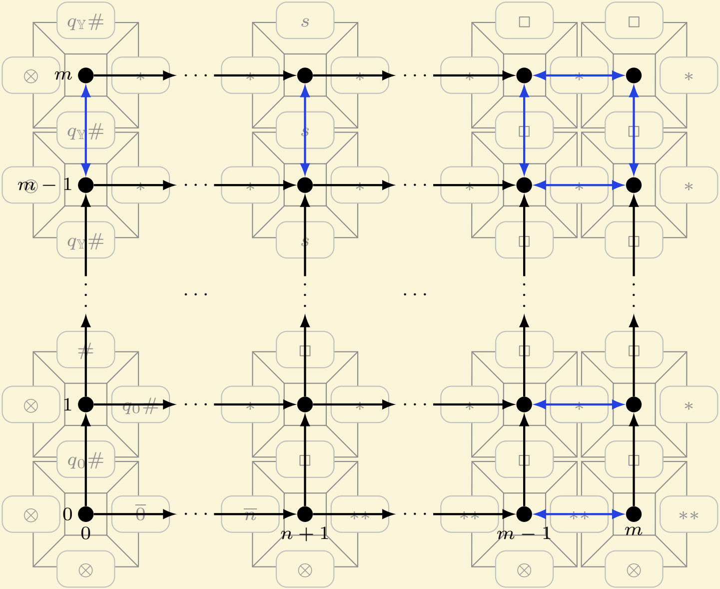
Смотрите на верхние метки

Шаг 2: Пример замощения плитками из T_n



Начальная конфигурация со входом 3 Смотрите на верхние метки

Пример конечной модели для T_n-замощения



Формулы логики предикатов:

$$\varphi \ ::= \ P^n(x_1,\ldots,x_n) \mid \bot \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \to \varphi) \mid \forall x\, \varphi \mid \exists x\, \varphi$$

Модель: $\boldsymbol{M} = \langle D, I\rangle$, где D — непустое множество *индивидов*, а I — *интерпретация предикатных букв* в D.

Приписывание: такая функция g, что $g(x) \in D$ для каждого x.

Истинность формулы φ в модели $\boldsymbol{M} = \langle D, I\rangle$ при приписывании g:

$$\begin{array}{lcl}
\boldsymbol{M} \models^g P(x_1,\ldots,x_n) & \leftrightharpoons & \langle g(x_1),\ldots,g(x_n)\rangle \in I(P);\\
\boldsymbol{M} \not\models^g \bot; & & \\
\boldsymbol{M} \models^g \varphi' \wedge \varphi'' & \leftrightharpoons & \boldsymbol{M} \models^g \varphi' \text{ и } \boldsymbol{M} \models^g \varphi'';\\
\boldsymbol{M} \models^g \varphi' \vee \varphi'' & \leftrightharpoons & \boldsymbol{M} \models^g \varphi' \text{ или } \boldsymbol{M} \models^g \varphi'';\\
\boldsymbol{M} \models^g \varphi' \to \varphi'' & \leftrightharpoons & \boldsymbol{M} \not\models^g \varphi' \text{ или } \boldsymbol{M} \models^g \varphi'';\\
\boldsymbol{M} \models^g \forall x\, \varphi' & \leftrightharpoons & \boldsymbol{M} \models^h \varphi' \text{ для любого } h \text{ с условием } h \stackrel{x}{=} g;\\
\boldsymbol{M} \models^g \exists x\, \varphi' & \leftrightharpoons & \boldsymbol{M} \models^h \varphi' \text{ для некоторого } h \text{ с условием } h \stackrel{x}{=} g.
\end{array}$$

QCl и $\mathbf{QCl}_{\mathit{fin}}$ — множество формул, истинных, соответственно, во всех моделях и всех конечных моделях.

Шаг 3: Формулы

$$
\begin{array}{rcl}
H_n(x,y) & = & P(x,y) \wedge \bigvee\limits_{i,j=0}^{k_n} \{P_i(x) \wedge P_j(y) : \square t_i^n = \square t_j^n\};\\[2ex]
V_n(x,y) & = & P(x,y) \wedge \bigvee\limits_{i,j=0}^{k_n} \{P_i(x) \wedge P_j(y) : \square t_i^n = \square t_j^n\};\\[2ex]
TC_0 & = & \forall x \bigvee\limits_{i=0}^{k_n} \left(P_i(x) \wedge \bigwedge\limits_{j \neq i} \neg P_j(x)\right);\\
TC_1 & = & \forall x \exists y\, H_n(x,y);\\
TC_2 & = & \forall x \exists y\, V_n(x,y);\\
TC_3 & = & \forall x \forall y\, (\exists z\, (H_n(x,z) \wedge V_n(z,y)) \leftrightarrow \exists z\, (V_n(x,z) \wedge H_n(z,y)));\\
TC_4 & = & \exists x\, P_0(x);\\
Tiling_n & = & TC_0 \wedge TC_1 \wedge TC_2 \wedge TC_3 \wedge TC_4;
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{rclccc}
Tiling_n^{\mathbb{X}} & = & Tiling_n \to \exists x\, P_1(x); & \longleftarrow & \text{“}n \in \mathbb{X}\text{”} & t_1 = t_{q_{\mathbb{X}}\#}\\
Tiling_n^{\mathbb{Y}} & = & Tiling_n \to \exists x\, P_2(x). & \longleftarrow & \text{“}n \in \mathbb{Y}\text{”} & t_2 = t_{q_{\mathbb{Y}}\#}
\end{array}
$$

Утверждения

Лемма

Если $n \in \mathbb{X}$, то $Tiling_n^{\mathbb{X}} \in \mathbf{QCl}$.

Лемма

Если $n \in \mathbb{Y}$, то $Tiling_n^{\mathbb{X}} \notin \mathbf{QCl}_{\mathit{fin}}$.

Теорема Трахтенброта

Логики $\mathbf{QCl}$ и $\mathbf{QCl}_{\mathit{fin}}$ рекурсивно неразличимы в языке с тремя предметными переменными.

Следствие

Логика $\mathbf{QCl}$ неразрешима (теорема Чёрча).
Логика $\mathbf{QCl}_{\mathit{fin}}$ неперечислима.

Шаг 4: Релятивизация

Пусть G — новая одноместная предикатная буква; определим ограниченные кванторы $\forall_G$ и $\exists_G$:

$$\begin{array}{rcl} \forall_G x\, \varphi & = & \forall x\, (G(x) \to \varphi); \\ \exists_G x\, \varphi & = & \exists x\, (G(x) \wedge \varphi). \end{array}$$

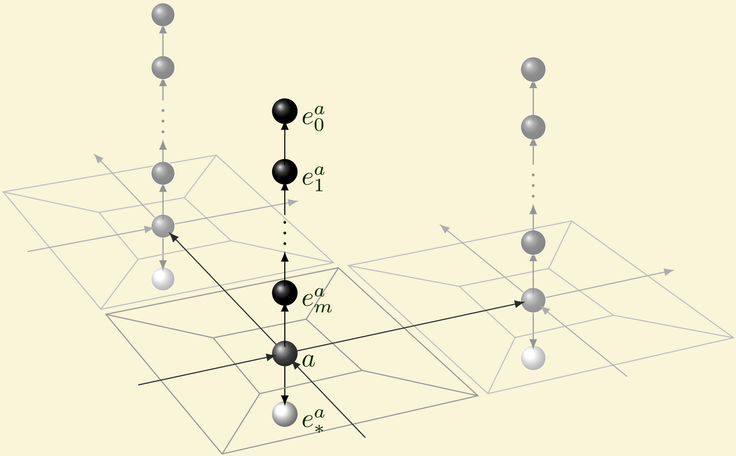
Пусть φ_G — формула, полученная из φ заменой кванторов $\forall x$ и $\exists x$ на $\forall_G x$ и $\exists_G x$ соответственно.

Лемма

Пусть φ — замкнутая формула без вождений G. Тогда

$$\begin{array}{lcl} \varphi \in \mathbf{QCl} & \iff & \exists x\, G(x) \to \varphi_G \in \mathbf{QCl}. \\ \varphi \in \mathbf{QCl}_{\mathit{fin}} & \iff & \exists x\, G(x) \to \varphi_G \in \mathbf{QCl}_{\mathit{fin}}. \end{array}$$

Шаг 5: Элиминация одноместных предикатных букв



Шаг 5: Формулы

Моделируем одноместные предикатные буквы:

$$
\begin{array}{rcl}
\varepsilon^y(x) & = & \neg\exists y\, P(x,y); \\
\tau_0^y(x) & = & \exists y\,(\neg G(y) \wedge P(x,y) \wedge \varepsilon^x(y)); \\
\tau_{k+1}^y(x) & = & \exists y\,(\neg G(y) \wedge P(x,y) \wedge \tau_k^x(y)); \\
\mathit{tile}_k(x) & = & \tau_k^y(x); \qquad \mathit{tile}_k(y) \;=\; \tau_k^x(y); \qquad \mathit{tile}_k(z) \;=\; \tau_k^x(z); \\
\gamma^y(x) & = & \neg P(x,x) \wedge \exists y\,(P(x,y) \wedge P(y,y)); \\
\mathit{grid}(x) & = & \gamma^y(x); \qquad \mathit{grid}(y) \;=\; \gamma^x(y); \qquad \mathit{grid}(z) \;=\; \gamma^x(z).
\end{array}
$$

Пусть $S_0\,\mathit{Tiling}_n^{\mathbb{X}}$ получается из $\exists x\, G(x) \to (\mathit{Tiling}_n^{\mathbb{X}})_G$ заменой

- $P_k(x)$, $P_k(y)$, $P_k(z)$ на $\mathit{tile}_k(x)$, $\mathit{tile}_k(y)$, $\mathit{tile}_k(z)$;
- $G(x)$, $G(y)$, $G(z)$ на $\mathit{grid}(x)$, $\mathit{grid}(y)$, $\mathit{grid}(z)$

соответственно.

Утверждения

Лемма

Если $n \in \mathbb{X}$, то $S_0\,Tiling_n^{\mathbb{X}} \in \mathbf{QCl}$.

Лемма

Если $n \in \mathbb{Y}$, то $S_0\,Tiling_n^{\mathbb{X}} \notin \mathbf{QCl}_{\mathit{fin}}$.

Теорема Трахтенброта (усиленная формулировка)

Логики $\mathbf{QCl}$ и $\mathbf{QCl}_{\mathit{fin}}$ рекурсивно неразличимы в языке с двухместной предикатной буквой и тремя переменными.

Следствие

Логика $\mathbf{QCl}$ неразрешима в языке с бинарной предикатной буквой и тремя переменными.
Логика $\mathbf{QCl}_{\mathit{fin}}$ неперечислима в языке с бинарной предикатной буквой и тремя переменными.

Что удалось доказать ещё

Пусть

- $\mathbf{SIB}_{\mathit{fin}}$ — теория симметричного иррефлексивного бинарного отношения на конечных множествах;
- $\mathbf{SRB}_{\mathit{fin}}$ — теория симметричного рефлексивного бинарного отношения на конечных множествах.

Теорема

Как теории $\mathbf{QCl}$ и $\mathbf{SIB}_{\mathit{fin}}$, так и теории $\mathbf{QCl}$ и $\mathbf{SRB}_{\mathit{fin}}$ рекурсивно неразличимы в языке с двухместной предикатной буквой и тремя переменными.

Следствие

Любая теория бинарного предиката, лежащая между теориями $\mathbf{QCl}$ и $\mathbf{SIB}_{\mathit{fin}}$ или между теориями $\mathbf{QCl}$ и $\mathbf{SRB}_{\mathit{fin}}$, неразрешима.

Литература

R. Berger. The Undecidability of the Domino Problem. Volume 66 of Memoirs of AMS. AMS, 1966.

E. Börger, E. Grädel, Y. Gurevich. The Classical Decision Problem. Springer, 1997.

A. Church. A note on the "Entscheidungsproblem". The Journal of Symbolic Logic, 1:40–41, 1936.

Yu. L. Ershov, I. A. Lavrov, A. D. Taimanov, M. A. Taitslin. Elementary theories. Russian Mathematical Surveys, 20(4):35–105, 1965.

M. Rybakov. Computational complexity of binary predicate theories with a small number of variables in the language. Doklady Mathematics, 507(6):61–65, 2022.

М. Рыбаков. Бинарный предикат, транзитивное замыкание, две-три переменные: сыграем в домино? Логические исследования, 29(1):114–146, 2023.

M. Rybakov. Recursive inseparability of classical theories of a binary predicate and non-classical logics of a unary predicate. Submitted.

A. Tarski, S. Givant. A Formalization of Set Theory without Variables, volume 41 of American Mathematical Society Colloquium Publications. AMS, 1987.

Б. А. Трахтенброт. О рекурсивной отделимости. Доклады АН СССР, 88:953–956, 1953.

Благодарность

Спасибо за внимание!