РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
ИНСТИТУТ ПРОБЛЕМ ПЕРЕДАЧИ ИНФОРМАЦИИ имени А.А. Харкевича

НАЦИОНАЛЬНЫЙ ИССЛЕДОВАТЕЛЬСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ

Метод Крипке моделирования бинарного предиката унарными

Михаил Рыбаков
ИППИ РАН, ТвГУ, НИУ ВШЭ

Новосибирск

21 мая 2024 года

Трюк Крипке — что это?

Пусть

- Q — бинарная предикатная буква;
- P_1 и P_2 — унарные предикатные буквы.

Трюк Крипке (синтаксическа формулировка)

В классических формулах первого порядка $Q(x, y)$ *моделируется* в логике **QS5** формулой $\Diamond(P_1(x) \wedge P_2(y))$.

Пусть φ^* — модальная формула, получающаяся из классической формулы φ подстановкой формулы $\Diamond(P_1(x) \wedge P_2(y))$ вместо $Q(x, y)$. Тогда

$$\varphi \in \mathbf{QCl} \iff \varphi^* \in \mathbf{QS5}.$$

S.A. Kripke.
The undecidability of monadic modal quantification theory.
Zeitschrift für Matematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 8:113–116, 1962.

Что даёт трюк Крипке?

Теорема Чёрча (усиленная формулировка)

Логика бинарного предиката алгоритмически неразрешима.

Трюк Крипке

В классических формулах первого порядка
$Q(x, y)$ *моделируется* в логике **QS5** формулой $\Diamond(P_1(x) \wedge P_2(y))$.

Следствие

Логика бинарного предиката *алгоритмически сводится*
к монадическом фрагменту модальной логики **QS5**.

Следствие

Модальная логика, содержащая **QCl** и содержащаяся в **QS5**, алгоритмически неразрешима в языке с двумя унарными предикатными буквами.

Вопрос: чем это всё интересно?

Модальные предикатные формулы

Модальные предикатные формулы:

$$\varphi \ ::= \ P(\boldsymbol{x}) \mid \bot \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \to \varphi) \mid \forall x\, \varphi \mid \Box\varphi$$

Стандартные сокращения:

$$\begin{array}{lcl}
\neg\varphi & = & \varphi \to \bot; \\
\varphi \leftrightarrow \psi & = & (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi); \\
\exists x\, \varphi & = & \neg\forall x\, \neg\varphi; \\
\Diamond\varphi & = & \neg\Box\neg\varphi.
\end{array}$$

Семантика Крипке

Шкала Крипке: $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$, где R — бинарное отношение на непустом множестве W.

Расширяющиеся области: Пусть $D = (D_w)_{w \in W}$ — система непустных множеств (предметных областей), для которой

$$wRw' \implies D_w \subseteq D_{w'}.$$

Шкала с областями: $\mathfrak{F}_D = \langle W, R, D \rangle$.

Пусть $\boldsymbol{M}_w = (D_w, I_w)$ — классическая модель.
Модель Крипке: $\mathfrak{M} = (W, R, D, I)$, где $D = (D_w)_{w \in W}$ и $I = (I_w)_{w \in W}$.

Локально постоянные области:

$$wRw' \implies D_w = D_{w'}.$$

Используем обозначение $\mathfrak{F} \odot \mathcal{D}$, если $D_w = \mathcal{D}$ для всех $w \in W$.

Истинность формул

Отношение истинности для модальных формул:

- $\mathfrak{M}, w \models^g P(x_1, \ldots, x_n)$, если $\langle g(x_1), \ldots, g(x_n) \rangle \in P^w$;
- $\mathfrak{M}, w \not\models^g \bot$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi \wedge \psi$, если $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi$ и $\mathfrak{M}, w \models^g \psi$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi \vee \psi$, если $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi$ или $\mathfrak{M}, w \models^g \psi$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi \to \psi$, если $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi$ влечёт $\mathfrak{M}, w \models^g \psi$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g \forall x\, \varphi$, если $\mathfrak{M}, w \models^{g'} \varphi$ для любого g', такого, что $g' \stackrel{x}{=} g$ и $g'(x) \in D_w$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g \Box\varphi$, если $\mathfrak{M}, w' \models^g \varphi$ для каждого $w' \in R(w)$.

- $\mathfrak{M}, w \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, если $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, для каждого g, где $g(x_1), \ldots, g(x_n) \in D_w$;
- $\mathfrak{M} \models \varphi$, если $\mathfrak{M}, w \models \varphi$ для каждого $w \in W$;
- $\mathfrak{F}_D \models \varphi$, если $\mathfrak{M} \models \varphi$ для каждой модели $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{F}_D$;
- $\mathfrak{F} \models \varphi$, если $\mathfrak{F}_D \models \varphi$ для каждой шкалы $\mathfrak{F}_D$ на $\mathfrak{F}$.

Пример 1.

$$\begin{array}{lclcl} D_1 & = & \{(j)ohn, (m)ary\}, & & \\ I_1(Loves) & = & \boldsymbol{Loves}_1 & = & \{(j,m),(m,j)\}, \\ I_1(Married) & = & \boldsymbol{Married}_1 & = & \varnothing, \\ \boldsymbol{M}_1 & = & \langle D_1, I_1\rangle. & & \end{array}$$

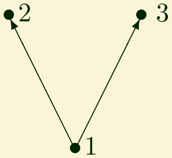
Пример 2. *Годом позже...*

$$\begin{array}{lclcl} D_2 & = & \{(j)ohn, (m)ary\}, & & \\ I_2(Loves) & = & \boldsymbol{Loves}_2 & = & \{(j,m),(m,j)\}, \\ I_2(Married) & = & \boldsymbol{Married}_2 & = & \{(j,m),(m,j)\}, \\ \boldsymbol{M}_2 & = & \langle D_2, I_2\rangle. & & \end{array}$$

Пример 3. *Годом позже... альтернативный вариант*

$$\begin{array}{lclcl} D_3 & = & \{(j)ohn, (m)ary, (s)teeve\}, & & \\ I_3(Loves) & = & \boldsymbol{Loves}_3 & = & \{(j,m),(m,s),(s,m)\}, \\ I_3(Married) & = & \boldsymbol{Married}_3 & = & \{(s,m),(m,s)\}, \\ \boldsymbol{M}_3 & = & \langle D_3, I_3\rangle. & & \end{array}$$

Примеры



$$W = \{1, 2, 3\},\ \ R = \{(1, 2), (1, 3)\};$$

$$\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle;$$

$$\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, D, I\rangle.$$

Тогда $\mathfrak{M}, 1 \models \exists x \exists y\, Loves(x, y);$
$\mathfrak{M}, 1 \models \exists x \exists y\, \Diamond Loves(x, y);$
$\mathfrak{M}, 1 \models \Box \exists x \exists y\, Married(x, y);$
$\mathfrak{M}, 1 \not\models \exists x \exists y\, \Box Married(x, y).$

Напоминание: $D_1 = \{j, m\},\ \ D_2 = \{j, m\},\ \ D_3 = \{j, m, s\},$

$$\begin{array}{lcl}
I_1(Loves) & = & \{(j, m), (m, j)\}; \\
I_1(Married) & = & \varnothing; \\
I_2(Loves) & = & \{(j, m), (m, j)\}; \\
I_2(Married) & = & \{(j, m), (m, j)\}; \\
I_3(Loves) & = & \{(j, m), (m, s), (s, m)\}; \\
I_3(Married) & = & \{(s, m), (m, s)\}.
\end{array}$$

Трюк Крипке: исходная конструкция

Пусть

- Q — бинарная предикатная буква;
- P_1 и P_2 — унарные предикатные буквы.

Пусть φ^* — модальная формула, получающаяся из классической формулы φ подстановкой формулы $\Diamond(P_1(x) \wedge P_2(y))$ вместо $Q(x, y)$.

Утверждение

$\varphi \in \mathbf{QCl} \iff \varphi^* \in \mathbf{QS5}$.

Доказательство ($\Rightarrow$)

$$\varphi \in \mathbf{QCl} \implies \varphi \in \mathbf{QS5} \implies \varphi^* \in \mathbf{QS5}.$$

Замечание: Здесь вместо **QS5** можно взять любую логику, содержащую **QCl**.

Доказательство ($\Leftarrow$)

Пусть $\varphi \notin \mathbf{QCl}$. Тогда существует классическая модель $\boldsymbol{M}$ с предметной областью $\mathbb{N}$, такая, что $\boldsymbol{M} \not\models \varphi$.
Пусть $\mathfrak{F} = (\mathbb{N}, \mathbb{N} \times \mathbb{N})$. Определяем I на шкале $\mathfrak{F} \odot \mathbb{N}$:

$$\begin{array}{rcl} I(n, P_1) & = & \{\langle m \rangle : \boldsymbol{M} \models Q(m, n)\}; \\ I(n, P_2) & = & \{\langle n \rangle\}. \end{array}$$

Пусть $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F} \odot \mathbb{N}, I \rangle$.
Тогда для любых $n, a, b \in \mathbb{N}$

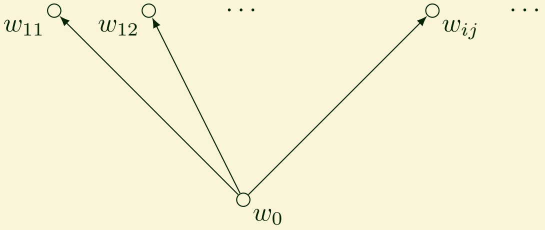
$$\mathfrak{M}, n \models P_1(a) \wedge P_2(b) \iff b = n \text{ и } \boldsymbol{M} \models Q(a, b).$$

Следовательно, для любого $k \in \mathbb{N}$

$$\mathfrak{M}, k \models \Diamond(P_1(a) \wedge P_2(b)) \iff \boldsymbol{M} \models Q(a, b).$$

Тогда $\varphi^* \notin \mathbf{QS5}$.

Если $\varphi \notin \mathbf{QCl}$, то $\boldsymbol{M} \not\models \varphi$ для некоторой модели $\boldsymbol{M}$ с областью $\mathbb{N}$.



Истинность:

$$w_{ij} \models P_1(a) \wedge P_2(b) \iff i = a,\ j = b \text{ и } \boldsymbol{M} \models Q(a,b).$$

Тогда:

$$w_0 \models \Diamond(P_1(a) \wedge P_2(b)) \iff \boldsymbol{M} \models Q(a,b).$$

Тогда $\varphi^* \notin L$, где L — логика, имеющая такую шкалу.

Наблюдение, А.В.Чагров

Если логика L имеет шкалу, удовлетворяющую КНС, то атомарная формула

$$Q(x_1, \ldots, x_n)$$

может быть промоделирована в L формулой

$$\Diamond(P_1(x_1) \wedge \ldots \wedge P_n(x_n)).$$

Одна унарная предикатная буква

Пусть $\psi^\star$ получается из ψ подстановкой $\Diamond(P(x) \wedge \Diamond P(y))$ вместо $Q(x, y)$.

Теорема

Пусть $\mathbf{QCl} \subseteq L \subseteq \mathbf{QKB}$ или $\mathbf{QCl} \subseteq L \subseteq \mathbf{QGL.bf}$. Тогда

$$\varphi \in \mathbf{QCl} \iff \varphi^\star \in L.$$

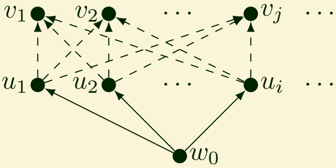
Доказательство.

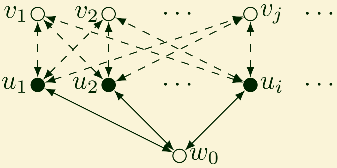
($\Rightarrow$):

Если $\varphi \in \mathbf{QCl}$, то $\varphi^\star \in L$ по подстановке.

($\Leftarrow$):

Пусть $\varphi \notin \mathbf{QCl}$. Тогда $\mathcal{M} \not\models \varphi$ для некоторой модели $\mathcal{M}$ с носителем $\mathbb{N}$. Берём в качестве $\mathfrak{F}$ одну из следующих шкал:





Тут $u_m R v_n$, если $\mathcal{M} \models Q(m,n)$.

Пусть $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F} \odot \mathbb{N}, I \rangle$ определена так, что

$$\begin{array}{rcl} I(u_m, P) & = & \{\langle m \rangle\}; \\ I(v_n, P) & = & \{\langle n \rangle\}. \end{array}$$

Тогда

$$\mathfrak{M}, w_0 \models \Diamond(P(a) \wedge \Diamond P(b)) \iff \mathcal{M} \models Q(a,b).$$

Получаем, что $\mathfrak{M}, w_0 \not\models \varphi^\star$. $\square$

Одна унарная предикатная буква: **SIB**

Мы «теряем» такие логики, как **QT**, **QS4**, **QGrz**, **QS5** и др. «Вернём» их.

Пусть $\psi^\star$ получается из ψ подстановкой $\neg\Diamond(P(x) \wedge P(y))$ вместо $Q(x, y)$.

Теорема

Пусть **QCl** $\subseteq L$ и $\mathfrak{F} \models L$ для некоторой шкалы $\mathfrak{F}$, удовлетворяющей КНС. Тогда

$$\varphi \in \mathbf{SIB} \iff \varphi^* \in L.$$

Следствие

Если **QCl** $\subseteq L$ и при этом L содержится в **QS5**, **QGL**.**3**.**bf**, **QGrz**.**3**.**bf**, **QGL**.**bf** $\oplus$ $\boldsymbol{bd}_2$ или **QGrz**.**bf** $\oplus$ $\boldsymbol{bd}_2$, то фрагмент L с одной унарной предикатной буквой и тремя предметными переменными является Σ^0_1-трудным.

Логики конечных областей

Пусть L_{dfin} — множество формул, истинных в классе шкал логики L, области которых конечны.

Класс $\mathscr{C}$ шкал Крипке удовлетвояет условию *wKHC*, если для каждого $n \in \mathbb{N}^+$ существует шкала $(W, R) \in \mathscr{C}$, в которой имеются $W_0 \subseteq W$ и $w_0 \in W$, такие, что

$$|W_0| = n \quad \text{и} \quad \{w_0\} \times W_0 \subseteq R.$$

Теорема

Пусть класс $\mathscr{C}$ удовлетворяет wKHC и $\mathscr{C} \models L$. Тогда

$$\varphi \in \mathbf{QCl}_{fin} \iff \varphi^* \in L_{dfin}.$$

Доказательство.

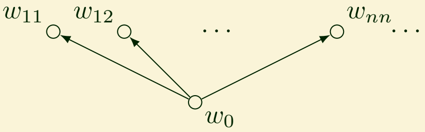
($\Rightarrow$):

Если $\varphi \in \mathbf{QCl}$, то $\varphi^* \in L_{dfin}$ по подстановке.

Логики конечных областей

(⇐):

Если $\varphi \notin \mathbf{QCl}_{fin}$, то существует конечная модель $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$, такая, что $\mathcal{M} \not\models \varphi$. Пусть $\mathcal{D} = \{1, \ldots, n\}$. Рассмотрим следующую шкалу $\mathfrak{F}$:



Определим модель $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F} \odot \mathcal{D}, I \rangle$ так, что

$$\mathfrak{M}, w_{ij} \models P_1(a) \wedge P_2(b) \iff i = a,\ j = b \text{ и } \mathcal{M} \models Q(a, b).$$

Тогда

$$\mathfrak{M}, w_0 \models \Diamond(P_1(a) \wedge P_2(b)) \iff \mathcal{M} \models Q(a, b).$$

Если $\mathfrak{M}, w_0 \models L$, то $\varphi^* \notin L_{dfin}$, поскольку $\mathfrak{M}, w_0 \not\models \varphi^*$. □

Логики классов конечных шкал

Пусть L_{wfin} — множество формул, истинных на шкалах логики L, имеющих конечное число миров.

Пусть

$$\begin{array}{rcl} C & = & \forall x \forall y \Big(\Box \big(P_2(x) \leftrightarrow P_2(y) \big) \to \\ & & \qquad \forall z \left(Q(x,z) \to Q(y,z) \right) \wedge \forall z \left(Q(z,x) \to Q(z,y) \right) \Big). \end{array}$$

Теорема

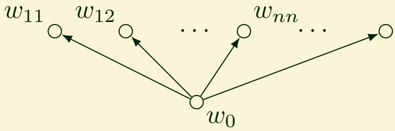
Пусть $\mathscr{C}$ — wKHC-класс конечных шкал и $\mathscr{C} \models L$. Тогда

$$\varphi \in \mathbf{QCl}_{fin} \iff C^* \to \varphi^* \in L_{wfin}.$$

Доказательство.

($\Leftarrow$):

Если $\varphi \notin \mathbf{QCl}_{fin}$, то существует конечная модель $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I} \rangle$, такая, что $\mathcal{M} \not\models \varphi$. Пусть $\mathcal{D} = \{1, \ldots, n\}$. Возьмём шкалу $\mathfrak{F}$:



Пусть модель $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F} \odot \mathcal{D}, I \rangle$ такова, что

$$\mathfrak{M}, w_{ij} \models P_1(a) \wedge P_2(b) \iff i = a,\ j = b \text{ и } \mathcal{M} \models Q(a, b).$$

Тогда

$$\mathfrak{M}, w_0 \models \Diamond(P_1(a) \wedge P_2(b)) \iff \mathcal{M} \models Q(a, b).$$

Если $\mathfrak{M}, w_0 \models L$, то $C^* \to \varphi^* \notin L_{wfin}$, поскольку $\mathfrak{M}, w_0 \not\models C^* \to \varphi^*$.

(⇒):

Пусть $C^* \to \varphi^* \notin L_{wfin}$. Тогда существуют конечная шкала $\mathfrak{F} = \langle W, R\rangle$ в $\mathscr{C}$, модель $\mathfrak{M} = \langle \mathfrak{F}, D, I\rangle$ и $w_0 \in W$, такие, что

$$\mathfrak{M}, w_0 \models C^* \quad \text{and} \quad \mathfrak{M}, w_0 \not\models \varphi^*.$$

Определим бинарное отношение $\approx$ на D_{w_0}:

$$a \approx b \iff \mathfrak{M}, w_0 \models \Box(P_2(a) \leftrightarrow P_2(b)).$$

Положим $[a] = \{b \in D_{w_0} : a \approx b\}$ и $\mathcal{D} = \{[a] : a \in D_{w_0}\} = D_{w_0} / \approx$.
Заметим, что $|\mathcal{D}| \leqslant 2^{|W|}$; в частности, $\mathcal{D}$ является конечным.
Поскольку $\mathfrak{M}, w_0 \models C^*$, отношение $\approx$ — это конгруэнция для отношения $\{\langle a, c\rangle : \mathfrak{M}, w_0 \models \Diamond(P_1(a) \wedge P_2(c))\}$ на D_{w_0}.
Определим $\mathcal{M} = \langle \mathcal{D}, \mathcal{I}\rangle$:

$$\mathcal{M} \models Q([a], [c]) \iff \mathfrak{M}, w_0 \models \Diamond(P_1(a) \wedge P_2(c)).$$

Тогда $\mathcal{M} \not\models \varphi$, а значит, $\varphi \notin \mathbf{QCl}_{fin}$. □

Результаты

Следствие

Пусть $\mathbf{QCl} \subseteq L$ и при этом L содержится в $\mathbf{QS5}$, $\mathbf{QGL.3.bf}$, $\mathbf{QGrz.3.bf}$, $\mathbf{QGL.bf} \oplus \boldsymbol{bd}_2$ или $\mathbf{QGrz.bf} \oplus \boldsymbol{bd}_2$. Тогда фрагменты логик L_{dfin} и L_{wfin} с двумя унарными предикатными буквами и тремя предметными переменными Π^0_1-трудны.

Наблюдение: $\mathbf{SIB}_{fin}$ является Π^0_1-полной в языке с тремя предметными переменными (и одной бинарной предикатной буквой).

Значит, $Q(x,y)$ моделируется с помощью $\neg\Diamond(P(x) \wedge P(y))$.

Следствие

Пусть $\mathbf{QCl} \subseteq L$ и при этом L содержится в $\mathbf{QS5}$, $\mathbf{QGL.3.bf}$, $\mathbf{QGrz.3.bf}$, $\mathbf{QGL.bf} \oplus \boldsymbol{bd}_2$ или $\mathbf{QGrz.bf} \oplus \boldsymbol{bd}_2$. Тогда фрагменты логик L_{dfin} и L_{wfin} с одной унарной предикатной буквой и тремя предметными переменными Π^0_1-трудны.

Трюк Крипке в модальных формулах

Подстановка: $\Diamond(P_1(x_1) \wedge \ldots \wedge P_n(x_n))$ вместо $Q(x_1, \ldots, x_n)$.

При этом требуется релятивизация:
подформулы вида $\Box\varphi$ надо заменить на $\Box(p \to \varphi)$.

Потом вместо p можно использовать $\Diamond\top$ (например, в **QK**) или $\Diamond\exists x\, P_2(x)$, если моделируем $Q(x, y)$ с помощью $\Diamond(P_1(x) \wedge P_2(y))$.

Замечание: имеются ограничения (например, в случае транзитивных шкал).

Интуиционистские формулы

Интуиционистские предикатные формулы:

$$\varphi \quad ::= \quad P(x_1, \ldots, x_n) \mid \bot \mid (\varphi \wedge \varphi) \mid (\varphi \vee \varphi) \mid (\varphi \to \varphi) \mid \forall x\, \varphi \mid \exists x\, \varphi$$

Стандартные сокращения:

$$\begin{array}{rcl} \neg\varphi & = & \varphi \to \bot; \\ \top & = & \neg\bot; \\ \varphi \leftrightarrow \psi & = & (\varphi \to \psi) \wedge (\psi \to \varphi). \end{array}$$

Интуиционистская семантика Крипке

Шкала Крипке: $\mathfrak{F} = \langle W, R \rangle$, где R рефлексивно и транзитивно.

Расширяющиеся области: Пусть $D = (D_w)_{w \in W}$ — система непустых множеств (предметных областей), для которой

$$wRw' \implies D_w \subseteq D_{w'}.$$

Шкала с областями: $\mathfrak{F}_D = \langle W, R, D \rangle$.

Пусть $\mathfrak{M}_w = (D_w, I_w)$ — классическая модель и

$$wRw' \implies I_w(P) \subseteq I_{w'}(P).$$

Модель Крипке: $\mathfrak{M} = (W, R, D, I)$, где $D = (D_w)_{w \in W}$ и $I = (I_w)_{w \in W}$.

Локально постоянные области:

$$wRw' \implies D_w = D_{w'}.$$

Используем обозначение $\mathfrak{F} \odot \mathcal{D}$, если $D_w = \mathcal{D}$ для всех $w \in W$.

Интуиционистская семантика Крипке

Отношение истинности:

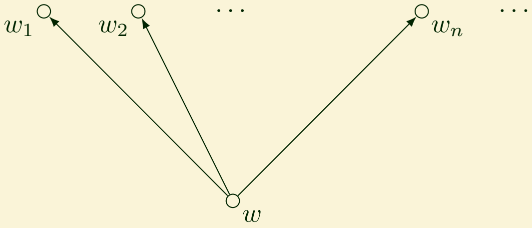
- $\mathfrak{M}, w \models^g P(x_1, \ldots, x_n)$, если $\langle g(x_1), \ldots, g(x_n) \rangle \in I_w(P)$;
- $\mathfrak{M}, w \not\models^g \bot$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi \wedge \psi$, если $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi$ и $\mathfrak{M}, w \models^g \psi$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi \vee \psi$, если $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi$ или $\mathfrak{M}, w \models^g \psi$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi \to \psi$, если $\mathfrak{M}, w' \not\models^g \varphi$ или $\mathfrak{M}, w' \models^g \psi$ при $w' \in R(w)$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g \exists x\, \varphi$, если $\mathfrak{M}, w \models^{g'} \varphi$ для нек. g', т.ч. $g' \stackrel{x}{=} g$ и $g'(x) \in D_w$;
- $\mathfrak{M}, w \models^g \forall x\, \varphi$, если $\mathfrak{M}, w' \models^{g'} \varphi$ для вс. $w' \in R(w)$ и вс. g', т.ч. $g' \stackrel{x}{=} g$ и $g'(x) \in D_{w'}$.

- $\mathfrak{M} \models \varphi(x_1, \ldots, x_n)$, если $\mathfrak{M}, w \models^g \varphi(x_1, \ldots, x_n)$ для вс. w и g, т.ч. $g(x_1), \ldots, g(x_n) \in D_w$;
- $\mathfrak{F}_D \models \varphi$, если $\mathfrak{M} \models \varphi$ для любой модели $\mathfrak{M}$ на $\mathfrak{F}_D$;
- $\mathfrak{F} \models \varphi$, если $\mathfrak{F}_D \models \varphi$ для любой шкалы $\mathfrak{F}_D$ на $\mathfrak{F}$;
- $\mathscr{C} \models \varphi$, если $\mathfrak{F}_D \models \varphi$ для любой шкалы $\mathfrak{F}_D$ из $\mathscr{C}$.

Трюк Крипке в интуиционистской логике

Модальный случай

Подстановка $\Diamond(P_1(x) \wedge P_2(y))$ вместо $Q(x, y)$.



Интуиционистский случай

Подстановка $(P_1(x) \wedge P_2(y) \to \bot) \vee q$ вместо $Q(x, y)$.

Замечание: трюк Крипке работает для позитивных формул.

Подстановка $(P_1(x) \wedge P_2(y) \to \ p) \vee q$ вместо $Q(x, y)$.

Подстановка $(P(x) \wedge P(y) \to \ p) \vee q$ вместо $Q(x, y)$ для **SRB**.

Трюк Крипке: ограничения

Анализ трюка Крипке показывает, что возможность его применения предполагает выполнение некоторых условий, в частности,

(1) использование формул, где под модальностью может быть более одной свободной переменной;

(2) отсутствие в логике средств, ограничивающих число миров, достижимых из произвольного мира.

Условие (1) является *синтаксическим*.
Условие (2) является *семантическим*.

[Wolter & Zakharyaschev, 2001]:
Нарушение условия (1) приводит к так называемым *монодическим* фрагментам (когда в области действия модальности могут находится формулы с не более чем одной свободной переменной), которые часто оказываются разрешимыми.

Мы покажем, к чему приводит нарушение условия (2).

Монадический фрагмент классической логики

Если формула φ от n опровергается в какой-то модели, то она опровергается и в модели, где не более чем 2^n элементов.

Предложение

Монадический фрагмент классической логики предикатов алгоритмически разрешим.

Замечание: классическая логика — это логика одного мира.

Вопрос: что будет, если в шкале 2 мира? 3 мира? *n миров?*

Конечное число миров

Пусть шкала $\mathfrak{F} = (W, R)$ содержит ровно m миров и пусть φ — формула от унарных букв $P_1, \ldots, P_n$, опровергающаяся в мире некоторой модели $\mathfrak{M} = (W, R, D, I)$, определённой на $\mathfrak{F}$. Полагаем $a \sim b$, если для любого $w \in W$ и любого $i \in \{1, \ldots, n\}$

$$
\begin{array}{rcl}
a \in D_w & \iff & b \in D_w; \\
w \models P_i(a) & \iff & w \models P_i(b).
\end{array}
$$

Получаем не более чем $2^{m\cdot(n+1)}$ классов эквивалентности по отношению $\sim$.

Предложение

Монадический фрагмент логики конечной шкалы алгоритмически разрешим.

Замечание: логика может быть как модальной, так и суперинтуиционистской.

Логики n-альтернативных шкал

Шкалу называем *n-альтернативной*, если из каждого мира этой шкалы достижимо не более чем n миров.
Пусть $\mathbf{QAlt}_n$ — модальная предикатная логика класса всех n-альтернативных шкал.

Теорема

Монадический фрагмент логики $\mathbf{QAlt}_n$ алгоритмически разрешим.

Предложение

Монадические фрагменты логик $\mathbf{QInt}_{wfin}$, $\mathbf{QK}_{wfin}$, $\mathbf{QT}_{wfin}$, $\mathbf{QK4}_{wfin}$, $\mathbf{QS4}_{wfin}$, $\mathbf{QS5}_{wfin}$ и др. являются Π^0_1-полными.

Замечание: Диадические фрагменты этих логик как Π^0_1-трудны, так и Σ^0_1-трудны.

Усиление результата Крипке для расширений $\mathbf{QK}$

Анонс результата (получено 6 мая 2024 года)

Пусть $\mathbf{QK} \subseteq L \subseteq \mathbf{QS5}_{wfin}$. Тогда фрагмент L в языке с одной унарной предикатной буквой и двумя предметными переменными является неразрешимым.

Литература

S.A. Kripke
The undecidability of monadic modal quantification theory
Zeitschrift für Matematische Logik und Grundlagen der Mathematik, 8, 1962, pp. 113–116

М.Н. Рыбаков
Неразрешимость модальных логик одноместного предиката
Логические исследования, 23:2, 2017, с. 60–75

M. Rybakov, D. Shkatov
Variations on the Kripke trick
Studia Logica (to appear)
DOI: 10.1007/s11225-023-10093-y

Спасибо за внимание!