Инфинитарное исчисление для первопорядковой вероятностной логики Огняновича

Лукашов Никита
lnv619@gmail.com

Национальный исследовательский университет
«Высшая школа экономики»

17 апреля 2024 год

$$\Gamma \models_{LFOP_1} \alpha \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{LFOP_1} \alpha$$

Синтаксис $LFOP_1$

Язык $LFOP_1$

- k-местные пред. символы $R_0^k, R_1^k, \ldots$ для каждого $k \in \mathbb{N}$;
- k-местные функц. символы $f_0^k, f_1^k, \ldots$ для каждого $k \in \mathbb{N}$;
- связки $\wedge$ и $\neg$, квантор $\forall$;
- унарные вероятн. операторы $P_{\geqslant s}$ для каждого $s \in [0,1]_{\mathbb{Q}}$;
- предметные переменные $x, y, z, \ldots$
- вспомогательные символы $,$ и $($, $)$.

- функциональные символы при $k = 0$ называются константами и обозначаются $a, b, c, \ldots$;
- $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ — формулы.

Синтаксис $LFOP_1$

Термы

Множество термов в языке $LFOP_1$ — это наименьшее множество:

- содержащее все переменные и константные символы;
- замкнутое относительно правила: если f — k-местный функц. символ и $t_1, \dots, t_k$ — термы, то $f(t_1, \dots, t_k)$ — терм.

Формулы

Множество формул For_{LFOP_1} в языке $LFOP_1$ — это наименьшее множество:

- содержащее все атомарные формулы $R_i^k(t_1, \dots, t_k)$, где R_i^k — k-местный пред. символ и $t_1, \dots, t_k$ — произвольные тремы;
- замкнутое относительно правил: если $\alpha, \beta \in For_{LFOP_1}$, то $\neg\alpha,\ P_{\geqslant s}\alpha,\ (\alpha \wedge \beta),\ (\forall x\ \alpha) \in For_{LFOP_1}$.

Синтаксис $LFOP_1$

Сокращения

- $(\alpha \vee \beta) := \neg(\neg\alpha \wedge \neg\beta)$;
- $(\alpha \to \beta) := (\neg\alpha \vee \beta)$;
- $(\alpha \leftrightarrow \beta) :=$ $((\alpha \to \beta) \wedge (\beta \to \alpha))$;
- $(\exists x\, \alpha) := \neg\forall x\, \neg\alpha$;
- $P_{<s}\alpha := \neg P_{\geqslant s}\alpha$;
- $P_{\leqslant s}\alpha := P_{\geqslant 1-s}\neg\alpha$;
- $P_{>s}\alpha := \neg P_{\leqslant s}\alpha$;
- $P_{=s}\alpha := P_{\geqslant s}\alpha \wedge P_{\leqslant s}\alpha$;
- $\bot := \alpha \wedge \neg\alpha$.

- $\alpha(t/x)$ — результат подстановки терма t вместо всех свободных вхождений переменной x в формуле α.

Синтаксис $LFOP_1$

Примеры

- $P_{\geqslant 0.5}(\exists x)R(x)$
- $\forall x\, P_{\leqslant 0.001}Q(x) \wedge P_{\geqslant 0.999}\exists x\, Q(x)$ (лотерейный парадокс)
- $P_{\geqslant s}P(x) \to (Q_1(y) \wedge P_{\geqslant r}P_{<t}Q_2(f(b,z))$

Семантика $LFOP_1$

Определение

$LFOP_1$-моделью называется $\mathcal{M} = \langle W, D, I, Prob \rangle$, где:

- W — непустое множество миров;
- D — непустой носитель, **одинаковый** для всех $w \in W$;
- I сопоставляет интерпретацию $I(w)$ для каждого $w \in W$, т.ч.:
  - если f — k-местный функц. символ, то $I(w)(f) : D^k \to D$ — **одна и та же** функция для всех $w \in W$;
  - если P — k-местный пред. символ, то $I(w)(P)$ — отношение на D^k, у каждого $w \in W$ **своё**.

…

Семантика $LFOP_1$

Определение (продолжение)

- $Prob$ сопоставляет каждому миру $w \in W$ вероятностное пространство $Prob(w) = \langle W(w), H(w), \mu(w) \rangle$, где:
  - $W(w) \subseteq W$, $W(w) \neq \varnothing$;
  - $H(w)$ — **алгебра** подмножеств $W(w)$:
    - $W(w) \in H(w)$;
    - если $A, B \in H(w)$, то $W(w) \backslash A \in H(w)$ и $A \cup B \in H(w)$.
  - $\mu(w) : H(w) \to [0, 1]$ — **конечно аддитивная** вероятн. мера:
    - $\mu(w)(W(w)) = 1$;
    - $\mu(w)(A \cup B) = \mu(w)(A) + \mu(w)(B)$, если $A \cap B = \varnothing$.

Семантика $LFOP_1$

Определение

Пусть $\mathcal{M} = \langle W, D, I, Prob \rangle$ — $LFOP_1$-модель.
Оценкой называется отображение $v : \mathrm{Var} \to D$. Если $d \in D$, то $v[d/x](y) = v(y)$ для всех $y \neq x$ и $v[d/x](x) = d$.

Определение

Для $\mathcal{M} = \langle W, D, I, Prob \rangle$ — $LFOP_1$-модели и оценки v определим значение терма t в мире $w \in W$ (обозначение $I(w)(t)_v$):

- если $t = x$, то $I(w)(t)_v = v(x)$;
- если $t = f(t_1, \ldots, t_k)$, то

$$I(w)(t)_v = I(w)(f)(I(w)(t_1)_v, \ldots, I(w)(t_k)_v).$$

Семантика $LFOP_1$

Замечание

Во всех мирах $LFOP_1$-моделей при данной оценке значения термов **одинаковы**.

Определение

Истинность формулы α в мире $w \in W$ для $LFOP_1$-модели $\mathcal{M} = \langle W, D, I, Prob \rangle$ и оценки v (обозначение $I(w)(\alpha)_v$):

- для $\alpha = P(t_1, \dots, t_k)$ положим
$$I(w)(\alpha)_v = I(w)(P)(I(w)(t_1)_v, \dots, I(w)(t_k)_v);$$
- для $\alpha = \neg\beta$ и $\alpha = \beta \wedge \gamma$ значение $I(w)(\alpha)_v$ определяется локально;

...

Семантика $LFOP_1$

Определение (продолжение)

- для $\alpha = P_{\geqslant s}\beta$ положим $I(w)(\alpha)_v = 1$, если
$$\mu(w)(\{u \in W \mid I(u)(\beta)_v = 1\}) \geqslant s,$$
  и $I(w)(\alpha)_v = 0$, иначе;
- для $\alpha = \forall x\, \beta$ положим $I(w)(\alpha)_v = 1$, если для любого $d \in D$ выполнено $I(w)(\beta)_{v[d/x]} = 1$, и $I(w)(\alpha)_v = 0$, иначе.

Справедливый вопрос

Почему для данных моделей $\mathcal{M}$, оценки v, мира w и формулы β множество $[\beta]_{\mathcal{M},v,w}$ окажется $\mu(w)$-измеримым?

Не очень честный ответ

Обозначим через $LFOP_{1,Meas}$ — множество всех $LFOP_1$-моделей, для которых при любой оценке v, для любой формулы β и любого мира w множество $[\beta]_{\mathcal{M},v,w}$ является $\mu(w)$-измеримым.

Определение

- α выполнима в мире w $LFOP_1$-модели $\mathcal{M}$ (обозн. $\mathcal{M}, w \vDash \alpha$), если для любой оценки v верно $I(w)(\alpha)_v = 1$.
- α общезначима в $LFOP_1$-модели $\mathcal{M}$ (обозн. $\mathcal{M} \vDash \alpha$), если для любого мира $w \in \mathcal{M}$ выполнено $\mathcal{M}, w \vDash \alpha$.
- α общезначима (обозн. $\vDash \alpha$), если для любой $LFOP_1$-модели $\mathcal{M}$ выполнено $\mathcal{M} \vDash \alpha$.

Проблемы с непостоянными термами

Рассмотрим $LFOP_1$-модель $\mathcal{M} = \langle W, D, I, Prob \rangle$:

w_1 $\qquad$ w_2 $\qquad$ $\mu(w_1)(\{w_1\}) = \mu(w_1)(\{w_2\}) = \frac{1}{2}$

$D = \{d_1, d_2\}$

$I(w_1)(R) = \{d_1\}$	$I(w_2)(R) = \{d_2\}$	$[R(d_1)]_{w_1} = \{w_1\}$
$I(w_1)(c) = d_2$	$I(w_2)(c) = d_1$	
$w_1 \not\models R(c)$	$w_2 \not\models R(c)$	$[R(d_2)]_{w_1} = \{w_2\}$

Fig. 1.1 Non-rigid terms.

Тогда $M, w_1 \not\models \forall x\, P_{\geqslant 0.5} R(x) \to P_{\geqslant 0.5} R(c)$.

Известные результаты про $LFOP_1$

Замечания

1. Теорема о компактности (множество формул выполнимо т.т.т каждое конечное подмножество формул выполнимо) неверна для $LFOP_1$.
2. Множество общезначимых формул $LFOP_1$ не перечислимо.

Пример

$$T = \{\neg P_{=0} R(c)\} \cup \{P_{<1/n} R(c) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

Семантическое следование

Определение

Формула $\alpha \in For_{LFOP_1}$ называется семантическим следованием множества $LFOP_1$-формул T (обоз. $T \vDash \alpha$), если для любой модели $\mathcal{M}$ выполнено

$$\mathcal{M} \vDash T \Rightarrow \mathcal{M} \vDash \alpha.$$

Цель

Построить акисоматизацию $LFOP_1$, такую что

$$T \vDash \alpha \Leftrightarrow T \vdash \alpha.$$

Аксиоматика $LFOP_1$

Схемы аксиом:

1. все пропозицоанльные тавтологии в языке $LFOP_1$
2. $\forall x\,(\alpha \to \beta) \to (\alpha \to \forall x\,\beta)$, где x не входит свободно в α
3. $\forall x\,\alpha(x) \to \alpha(t/x)$ для любого терма t
4. $P_{\geqslant 0}\alpha$
5. $P_{\leqslant r}\alpha \to P_{<s}\alpha$, где $s > r$
6. $P_{<s}\alpha \to P_{\leqslant s}\alpha$
7. $(P_{\geqslant r}\alpha \wedge P_{\geqslant s}\beta \wedge P_{\geqslant 1}(\neg\alpha \vee \neg\beta)) \to P_{\geqslant \min(1,r+s)}(\alpha \vee \beta)$
8. $(P_{\leqslant r}\alpha \wedge P_{<s}\beta) \to P_{<r+s}(\alpha \vee \beta)$, где $r + s \leqslant 1$

Аксиоматика $LFOP_1$

Правила вывода:

1. $$\frac{\alpha,\ \alpha \to \beta}{\beta}$$ (*modus ponens*)
2. $$\frac{\alpha}{\forall x\ \alpha}$$ (*Gen*)
3. $$\frac{\alpha}{P_{\geqslant 1}\alpha}$$ (*Gen′*)
4. $$\frac{\beta \to P_{\geqslant s-\frac{1}{k}}\alpha\ (k \in \mathbb{N}\ \&\ k \geqslant \frac{1}{s})}{\beta \to P_{\geqslant s}\alpha}$$ (ω-*rule*)

Эквивалентные формы аксиом и правил

Аксиомы:

- 4' $P_{\leqslant 1}\alpha$ $(= P_{\geqslant 1-s}\neg\alpha$ для $s = 1)$
- 5' $P_{\geqslant t}\alpha \to P_{>s}\alpha$, где $t > s$
- 6' $P_{>s}\alpha \to P_{\geqslant s}\alpha$

Правила вывода:

4' $$\frac{\beta \to P_{\leqslant s+\frac{1}{k}}\alpha \ (k \in \mathbb{N} \,\&\, k \geqslant \frac{1}{1-s})}{\beta \to P_{\leqslant s}\alpha}$$

Выводимость из гипотез

Определение

Формула α выводима из множества формул T (обозн. $T \vdash \alpha$), если существует последовательность формул $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{\lambda+1}$ (где λ — некоторый счётный ординал), такая что:

- $\alpha_{\lambda+1} = \alpha$
- α_i $(i \leqslant \lambda + 1)$ является либо аксиомой, либо $\alpha_i \in T$, либо получена по одному из правил вывода при условии, что правило 3 разрешается применять только к теоремам $LFOP_1$.

Максимальная непротиворечивость и насыщенность

Определение

- Множество T $LFOP_1$-формул называется непротиворечивым, если $T \nvdash \perp$, и противоречивым, иначе.
- Непротиворечивое множество формул T называется максимально непротиворечивым, если для любой формулы α либо $\alpha \in T$, либо $\neg\alpha \in T$.
- Множество формул T называется насыщенным, если оно максимально непротиворечиво и выполнено условие:
  - если $\neg\forall x\, \alpha(x) \in T$, то $\neg\alpha(t) \in T$ для некоторого терма t.

Пример противоречивого множества

$$T = \{\neg P_{=0}R(c)\} \cup \{P_{<1/n}R(c) \mid n \in \mathbb{N}\}$$

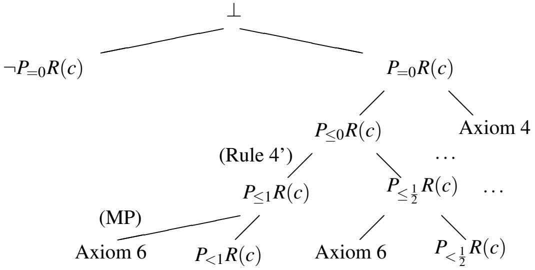

Fig. 1.2 Tree-like representation of the proof from Example 1.5.

Корректность $LFOP_1$

Теорема

Логика $LFOP_1$ корректна относительно $LFOP_{1,Meas}$-моделей.

Доказательство

Рассмотрим модель $\mathcal{M} = \langle W, D, I, Prob \rangle$ и формулу $\forall x\, \alpha(x) \to \alpha(t/x)$. Пусть $w \in \mathcal{M}$:

$$w \vDash \forall x\, \alpha(x), \text{ т.е.}$$
$$I(w)(\forall x\, \alpha(x))_v = 1 \text{ для любой оценки } v.$$

Положим $I(w)(t)_v = d$ и $v' = v[d/x]$. Тогда

$$I(w)(\alpha(x))_{v'} = I(w)(\alpha(t/x))_v = 1.$$

План доказательства

- слабая полнота:

$$\models \alpha \Leftrightarrow \vdash_{LFOP_1} \alpha$$

- сильная полнота:

$$\Gamma \models \alpha \Leftrightarrow \Gamma \vdash_{LFOP_1} \alpha$$

План

1. теорема о дедукции для $LFOP_1$
2. теорема Линдембаума для $LFOP_1$ (каждое непротиворечивое множество формул может быть расширено до насыщенного)
3. каноническая модель $\mathbf{M}$ со свойством: $w \models \alpha \Leftrightarrow \alpha \in w$ для любого мира $w \in \mathbf{M}$

Теорема о дедукции

Теорема о дедукции

Если T — множество $LFOP_1$-формул, то

$$T \cup \{\alpha\} \vdash \beta \Leftrightarrow T \vdash \alpha \to \beta.$$

Доказательство

($\Leftarrow$) Очевидно.

($\Rightarrow$) Трансфинитная индукция по длине вывода. Случаи

- $\alpha = \beta$
- $\vdash \beta$
- β, полученная по *modus ponens*

разбираются классически.

Доказательство (продолжение)

Если $T \cup \{\alpha\} \vdash P_{\geqslant 1}\gamma$ по правилу 3, тогда γ и $\beta = P_{\geqslant 1}\gamma$ — теоремы, поэтому:

$$T \vdash \beta$$
$$T \vdash \beta \to (\alpha \to \beta)$$
$$T \vdash \alpha \to \beta, \ \textit{modus ponens}$$

Теорема о дедукции

Доказательство (продолжение)

Наконец, пусть $\beta = \gamma \to P_{\geqslant s}\delta$ получена из $T \cup \{\alpha\}$ по правилу 4.

$$T, \alpha \vdash \gamma \to P_{\geqslant s - \frac{1}{k}}\delta, \text{ для всех целых } k \geqslant 1/s$$

$$T \vdash \alpha \to (\gamma \to P_{\geqslant s - \frac{1}{k}}\delta), \text{ для всех целых } k \geqslant 1/s, \text{по предп.}$$

$$T \vdash \alpha \wedge \gamma \to P_{\geqslant s - \frac{1}{k}}\delta, \text{ для всех целых } k \geqslant 1/s$$

$$T \vdash \alpha \wedge \gamma \to P_{\geqslant s}\delta, \text{ по правилу } \boxed{4}$$

$$T \vdash \alpha \to (\gamma \to P_{\geqslant s}\delta)$$

$$T \vdash \alpha \to \beta.$$

Теоремы $LFOP_1$

Лемма 1

1. $\vdash P_{\geqslant s}\alpha \to P_{\geqslant s}\neg\neg\alpha$
2. $\vdash P_{\geqslant 1}(\alpha \to \beta) \to (P_{\geqslant s}\alpha \to P_{\geqslant s}\beta)$
3. $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta \Rightarrow \vdash P_{\geqslant s}\alpha \leftrightarrow P_{\geqslant s}\beta$
4. $\vdash P_{\geqslant s}\alpha \to P_{\geqslant r}\alpha,\ s \geqslant r$
5. $\vdash P_{\leqslant s}\alpha \to P_{\leqslant r}\alpha,\ s \geqslant r$

Доказательство леммы 1

- Finally, the canonical model $\mathbf{M}_T$ is constructed using saturated sets (Lemma 1.4 and Lemma 1.5) such that for every world w, $w \models \alpha$ iff $\alpha \in w$ (Theorem 1.4).

Theorem 1.2 (Deduction theorem). *If T is a set of formulas, then*

$$T \cup \{\alpha\} \vdash \beta \quad \textit{iff} \quad T \vdash \alpha \to \beta.$$

Proof. The direction ($\Leftarrow$) can be proved exactly in the same way as in the classical case. For the ($\Rightarrow$)-direction we use the transfinite induction on the length of the inference. The cases:

- $\vdash \beta$,
- $\alpha = \beta$, or
- β is obtained by an application of Modus Ponens

are classical and follow as usual. If $T \cup \{\alpha\} \vdash P_{\geq 1}\gamma$ is obtained by an application of Rule 3, then γ and $\beta = P_{\geq 1}\gamma$ are theorems, and we have:

$T \vdash \beta$
$T \vdash \beta \to (\alpha \to \beta)$
$T \vdash \alpha \to \beta$, by Modus Ponens.

Finally, let $\beta = \gamma \to P_{\geq s}\delta$ be obtained from $T \cup \{\alpha\}$ by Rule 4. Then:

$T, \alpha \vdash \gamma \to P_{\geq s - \frac{1}{k}}\delta$, for every integer $k \geq \frac{1}{s}$
$T \vdash \alpha \to (\gamma \to P_{\geq s - \frac{1}{k}}\delta)$, for every integer $k \geq \frac{1}{s}$, by the induction hypothesis
$T \vdash (\alpha \wedge \gamma) \to P_{\geq s - \frac{1}{k}}\delta$, for every integer $k \geq \frac{1}{s}$
$T \vdash (\alpha \wedge \gamma) \to P_{\geq s}\delta$, by Rule 4
$T \vdash \alpha \to (\gamma \to P_{\geq s}\delta)$
$T \vdash \alpha \to \beta$. ■

The next lemmas 1.1, 1.2 and 1.3 will be used later on. In order to make this text self-contained, we give proofs for statements that are related to the probabilistic part of $LFOP_1$.

Lemma 1.1.

1. *$\vdash P_{\geq s}\alpha \to P_{\geq s}\neg\neg\alpha$,*
2. *$\vdash P_{\geq 1}(\alpha \to \beta) \to (P_{\geq s}\alpha \to P_{\geq s}\beta)$,*
3. *if $\vdash \alpha \leftrightarrow \beta$, then $\vdash P_{\geq s}\alpha \leftrightarrow P_{\geq s}\beta$,*
4. *$\vdash P_{\geq s}\alpha \to P_{\geq r}\alpha$, for $s \geq r$,*
5. *$\vdash P_{\leq r}\alpha \to P_{\leq s}\alpha$, $s \geq r$.*

Proof. (1) We have the following proof:

1. $\vdash P_{\geq 1}(\neg\alpha \vee \neg\bot)$, by Rule 3, from $\vdash \neg\alpha \vee \neg\bot$
2. $\vdash P_{\geq 1}((\neg\alpha \wedge \neg\bot) \vee \neg\neg\alpha)$, by Rule 3, from $\vdash (\neg\alpha \wedge \neg\bot) \vee \neg\neg\alpha$
3. $\vdash (P_{\geq s}\alpha \wedge P_{\geq 0}\bot \wedge P_{\geq 1}(\neg\alpha \vee \neg\bot)) \to P_{\geq s}(\alpha \vee \bot)$, an instance of Axiom 7
4. $\vdash P_{\geq s}\alpha \to P_{\geq s}(\alpha \vee \bot)$, from (1) and (3), since $P_{\geq 0}\bot$ is an instance of Axiom 4

5. $\vdash P_{\geq s}\alpha \to P_{\geq s}\neg(\neg\alpha \wedge \neg\bot)$, from (4) by the definition of $\vee$
6. $\vdash P_{\geq s}\alpha \to P_{\leq 1-s}(\neg\alpha \wedge \neg\bot)$, from (5) by the definition of $P_{\leq s}$
7. $(P_{\leq 1-s}(\neg\alpha \wedge \neg\bot) \wedge P_{<s}\neg\neg\alpha) \to P_{<1}((\neg\alpha \wedge \neg\bot) \vee \neg\neg\alpha)$, by Axiom 8
8. $(P_{\leq 1-s}(\neg\alpha \wedge \neg\bot) \wedge P_{<s}\neg\neg\alpha) \to \neg P_{\geq 1}((\neg\alpha \wedge \neg\bot) \vee \neg\neg\alpha)$, from (7) by the definition of $P_{<s}$
9. $\vdash (P_{\leq 1-s}(\neg\alpha \wedge \neg\bot) \wedge P_{<s}\neg\neg\alpha) \to \bot$, from (2) and (8)
10. $\vdash P_{\leq 1-s}(\neg\alpha \wedge \neg\bot) \to \neg P_{<s}\neg\neg\alpha$, by classical reasoning
11. $\vdash P_{\leq 1-s}(\neg\alpha \wedge \neg\bot) \to P_{\geq s}\neg\neg\alpha$, by the definition of $P_{<s}$
12. $\vdash P_{\geq s}\alpha \to P_{\geq s}\neg\neg\alpha$, from (6) and (11).

(2) The negation of the considered formula $P_{\geq 1}(\alpha \to \beta) \to (P_{\geq s}\alpha \to P_{\geq s}\beta)$ is equivalent to

$$P_{\geq 1}(\neg\alpha \vee \beta) \wedge P_{\geq s}\alpha \wedge P_{<s}\beta.$$

Using Lemma 1.1(1) that formula implies

$$P_{\geq 1}(\neg\alpha \vee \beta) \wedge P_{\geq s}\neg\neg\alpha \wedge P_{<s}\beta$$

which, using the definition of $P_{\leq 1-s}$ can be rewritten as

$$P_{\geq 1}(\neg\alpha \vee \beta) \wedge P_{\leq 1-s}\neg\alpha \wedge P_{<s}\beta.$$

By Axiom 8 we have

$$P_{\leq 1-s}\neg\alpha \wedge P_{<s}\beta \to P_{<1}(\neg\alpha \vee \beta)$$

and using the definition of $P_{<1}$ we obtain

$$\vdash \neg(P_{\geq 1}(\alpha \to \beta) \to (P_{\geq s}\alpha \to P_{\geq s}\beta)) \to P_{\geq 1}(\neg\alpha \vee \beta) \wedge \neg P_{\geq 1}(\neg\alpha \vee \beta).$$

It follows that

$$\vdash P_{\geq 1}(\alpha \to \beta) \to (P_{\geq s}\alpha \to P_{\geq s}\beta).$$

Note that this formula is a generalization of the modal axiom K: $\Box(\alpha \to \beta) \to (\Box\alpha \to \Box\beta)$.
(3) This is a consequence of Lemma 1.1(2).
(4) If $s = r$, the formula is of the form $\vdash \alpha \to \alpha$. If $s > r$, from Axiom 5' $P_{\geq s}\alpha \to P_{>r}\alpha$ (for $s > r$), and Axiom 6' $P_{>r}\alpha \to P_{\geq r}\alpha$, we obtain

$\vdash P_{\geq s}\alpha \to P_{\geq r}\alpha$.

Note that this formula expresses monotonicity of probabilities.
(5) Similarly as (4). ■

Lemma 1.2. *Let T be a consistent set of formulas.*

1. *For any formula α, either $T \cup \{\alpha\}$ is consistent or $T \cup \{\neg\alpha\}$ is consistent.*
2. *If $\neg(\alpha \to P_{\geq s}\beta) \in T$, then there is some $n > \frac{1}{s}$ such that $T \cup \{\alpha \to \neg P_{\geq s - \frac{1}{n}}\beta\}$ is consistent.*

Непротиворечивые множества $LFOP_1$

Лемма 2

Пусть T — непротиворечивое множество $LFOP_1$-формул.

1. Для любой формулы α, либо $T \cup \{\alpha\}$ непротиворечиво, либо $T \cup \{\neg\alpha\}$ непротиворечиво.
2. Если $\neg(\alpha \to P_{\geqslant s}\beta) \in T$, то найдётся $n > 1/s$, такое что $T \cup \{\alpha \to \neg P_{\geqslant s-\frac{1}{n}}\beta\}$ непротиворечиво.

Доказательство

1. Теорема о дедукции.
2. Пусть $T \cup \{\alpha \to \neg P_{\geqslant s-\frac{1}{n}}\beta\} \vdash \bot$ для любого $n > 1/s$. Тогда $T \vdash \alpha \to P_{\geqslant s-\frac{1}{n}}\beta$ для любого $n > 1/s$ и $T \vdash \alpha \to P_{\geqslant s}\beta$, что противоречит $\neg(\alpha \to P_{\geqslant s}\beta) \in T$.

Насыщенные множества $LFOP_1$

Лемма 3

Пусть T — насыщенное множество $LFOP_1$ формул.

1. $\alpha \in T \Rightarrow \neg\alpha \notin T$
2. $\alpha \wedge \beta \in T \Leftrightarrow \alpha \in T$ и $\beta \in T$
3. $T \vdash \alpha \Rightarrow \alpha \in T$
4. $\alpha \in T$ и $\alpha \to \beta \in T \Rightarrow \beta \in T$
5. $P_{\geqslant s}\alpha \in T$ и $s \geqslant r \Rightarrow P_{\geqslant r}\alpha \in T$
6. $r \in \mathbb{Q}$ и $r = \sup\{s \mid P_{\geqslant s}\alpha \in T\}$, то $P_{\geqslant r}\alpha \in T$

Теорема Линденбаума для $LFOP_1$

Теорема

Пусть T — непротиворечивое множество $LFOP_1(L)$ формул и C — счётное множество новых константных символов. Тогда T можно расширить до насыщенного множества формул $\mathcal{T}$ в языке $L \cup C$.

Доказательство

Пусть $\alpha_0, \alpha_1, \ldots$ — пересчёт всех формул в языке $L \cup C$. Определим последовательность формул $T_i, i = 0, 1, \ldots$:

Теорема Линденбаума для $LFOP_1$

Доказательство (продолжение)

1. $T_0 = T$
2. для любого $i \geqslant 0$:
   a. если $T_i \cup \{\alpha_i\}$ непротиворечиво, то $T_{i+1} = T_i \cup \{\alpha_i\}$; иначе
      i. если $\alpha_i = \beta \to P_{\geqslant s}\gamma$, то $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg\alpha_i, \beta \to \neg P_{\geqslant s - \frac{1}{n}}\gamma\}$, для некоторого $n > 1/s$, что T_{i+1} непротиворечиво; иначе
      ii. $T_{i+1} = T_i \cup \{\neg\alpha_i\}$
   b. если $\alpha_i = \neg\forall x\, \beta(x) \in T_{i+1}$, то добавим также $\neg\beta(c)$ в T_{i+1} для некоторой константы $c \in C$, чтобы T_{i+1} осталось непротивор.
3. $\mathcal{T} = \bigcup\limits_{i=0}^{\infty} T_i$

Можно показать, что $\mathcal{T}$ дедуктивно замкнуто, поэтому оно будет насыщенным.

Каноническая модель

Определим $\mathbf{M} = \langle W, D, I, Prob \rangle$:

- W — все насыщенные множества в языке $L \cup C$
- D — множество всех замкнутых термов в $L \cup C$
- Интерпретация I для мира $w \in W$:
  - $I(w)(f) : D^k \to D,\ (t_1, \dots, t_n) \mapsto f(t_1, \dots, t_n)$, где f — k-местный функциональный символ
  - $I(w)(P) = \{(t_1, \dots, t_n) \mid P(t_1, \dots, t_n) \in w\} \subseteq D^k$, где P — k-местный предикатный символ.
- Вероятностное пространство $Prob(w) = \langle W(w), H(w), \mu(w) \rangle$:
  - $W(w) = W$
  - $H(w)$ — все множества вида $[\alpha] = \{t \in W \mid \alpha \in t\}$
  - для каждого $[\alpha] \in H(w), \mu(w)([\alpha]) = \sup_s \{P_{\geqslant s}\alpha \in w\}$

Каноническая модель

Лемма 4

Пусть $\mathbf{M} = \langle W, D, I, Prob \rangle$ — каноническая модель. Тогда:

1. H — алгебра подмножеств W
2. $[\alpha] = [\beta] \Rightarrow \mu([\alpha]) = \mu([\beta])$
3. $\mu([\alpha]) \geqslant 0$
4. $\mu(W) = 1$ и $\mu(\varnothing) = 0$
5. $\mu([\alpha]) = 1 - \mu([\neg\alpha])$
6. $\mu([\alpha] \cup [\beta]) = \mu([\alpha]) + \mu([\beta])$ для $[\alpha] \cap [\beta] = \varnothing$

Кульминация

Лемма 5

$\mathbf{M} = \langle W, D, I, Prob \rangle$ — $LFOP_{1,Meas}$-модель.

Доказательство

Индукцией по построению α докажем, что $w \vDash \alpha \Leftrightarrow \alpha \in w$:

- атомарные формулы — по построению;
- $\wedge$ и $\neg$ — по предположению;
- если $\alpha = \forall x\, \beta(x)$, то по аксиоме 3 $\beta(t) \in w$ для любого терма t и $w \vDash \forall x\, \beta(x)$; если $\forall x\, \beta(x) \notin w$, то существует терм t, такой что $\neg\beta(t) \in w$, значит $w \nvDash \forall x\, \beta(x)$;
- если $\alpha = P_{\geqslant s}\beta \in w$, то $\sup_s\{P_{\geqslant s}\alpha \in w\} \geqslant s$ и $w \vDash P_{\geqslant s}\beta$; обратно, пусть $w \vDash P_{\geqslant s}\beta$. Если $\mu(w)([\beta]) = s$, то $P_{\geqslant s}\beta \in w$ по лемме 3; если $\mu(w)([\beta]) > s$, то по монотонности $P_{\geqslant s}\beta \in w$.

Развязка

Теорема

Множество T формул $LFOP_1$-непротиворечиво тогда и только тогда, когда T — $LFOP_{1,Meas}$-выполнимо.

Доказательство

По теореме Линденбаума, расширим T до насыщенного множества $\mathcal{T}$. Тогда в канонической модели $\mathbf{M}, \mathcal{T} \models T$, по лемме 5.

Теорема (сильная полнота $LFOP_1$)

Пусть $T \subset For_{LFOP_1}$ и $\alpha \in For_{LFOP_1}$. Тогда

$$T \models \alpha \;\Leftrightarrow\; T \vdash \alpha.$$