1. Обязательные соотношения, которые нужно уметь доказывать

1. $\arcsin a + \arccos a = \frac{\pi}{2},\ \forall a : |a| \le 1$**;**

2. $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arcctg} a = \frac{\pi}{2},\ \forall a$**;**

3. $\arcsin a + \arcsin(-a) = 0,\ \forall a : |a| \le 1$**;**

4. $\arccos a + \arccos(-a) = \pi,\ \forall a : |a| \le 1$**;**

5. $\operatorname{arctg} a + \operatorname{arctg}(-a) = 0,\ \forall a$**;**

6. $\operatorname{arcctg} a + \operatorname{arcctg}(-a) = \pi,\ \forall a$**;**

7. $\operatorname{arctg} a = \operatorname{arcctg}\frac{1}{a} = 0,\ \forall a > 0$**;**

8. $\pi + \operatorname{arctg} a = \operatorname{arcctg}\frac{1}{a},\ \forall a < 0$

9. $\sin(\arccos a) = \sqrt{1-a^2},\ \forall a : |a| \le 1$**.**

10. $\sin(\operatorname{arctg} a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}},\ \forall a$

11. $\sin(\operatorname{arcctg} a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}},\ \forall a$

12. $\cos(\arcsin a) = \sqrt{1-a^2},\ \forall a : |a| \le 1$**;**

13. $\cos(\operatorname{arctg} a) = \frac{1}{\sqrt{1+a^2}},\ \forall a$**;**

14. $\cos(\operatorname{arcctg} a) = \frac{a}{\sqrt{1+a^2}},\ \forall a$**;**

15. $\operatorname{tg}(\arcsin a) = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}},\ \forall a : |a| < 1$**;**

16. $\operatorname{tg}(\arccos a) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a},\ \forall a : 0 < |a| \le 1$**;**

17. $\operatorname{tg}(\operatorname{arcctg} a) = \frac{1}{a},\ \forall a : a \ne 0$**;**

18. $\operatorname{ctg}(\arcsin a) = \frac{\sqrt{1-a^2}}{a},\ \forall a : 0 < |a| < 1$**;**

19. $\operatorname{ctg}(\arccos a) = \frac{a}{\sqrt{1-a^2}},\ \forall a : |a| < 1$**;**

20. $\operatorname{ctg}(\operatorname{arctg} a) = \frac{1}{a},\ \forall a : a \ne 0$**.**

2. Вычисления и сравнения, которые нужно уметь выполнять без калькулятора.

1. Вычислить**:** $\sin(\operatorname{arctg}\sqrt{3}) + \cos(\operatorname{arcctg}(-1) + \operatorname{tg}(\arcsin\frac{3}{5}) + \operatorname{ctg}(\arccos(-\frac{12}{15}))$

2. Вычислить**:** $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg} 6)$; $\operatorname{arcctg}(\operatorname{tg} 2)$; $\arcsin(\sin 9)$; $\arccos(\sin 11)$

3. Сравните $\arcsin 0,2$ и $\arccos 0,3$.

4. Сравните $\operatorname{arctg}(-2)$ и $\arccos(-0,4)$.

5. Сравните $\frac{19\pi}{24}$ и $\arccos\left(-\sqrt{-\sqrt{2}\sin(\operatorname{arcctg} 1) - \frac{1}{4}}\right)$.

3. Переход к равносильному уравнению. Использование тождеств

Определение 1. *Уравнение* $f_1(x) = 0$ *равносильно уравнению* $f_2(x) = 0$*:* $f_1(x) = 0 \Leftrightarrow f_2(x) = 0$, *если каждый корень уравнения* $f_1(x) = 0$ *является корнем уравнения* $f_2(x) = 0$ *и наоборот. В частности, если уравнение* $f_1(x) = 0$ *не имеет корней, то и уравнение* $f_2(x) = 0$ *не имеет корней. Говорят, что множества корней равносильных уравнений совпадают.*

Например, $2\cos(\arcsin x) + 3\sqrt{1-x^2} = 5 \Leftrightarrow 2\sqrt{1-x^2} + 3\sqrt{1-x^2} = 5 \Leftrightarrow \sqrt{1-x^2} = 1 \Leftrightarrow x = 0$.

1.1. $\operatorname{arctg}(6-x) + \operatorname{arcctg}(4x - x^2) = \frac{\pi}{2}$;

1.2. $\arcsin(2 - \frac{x}{3}) + \arccos(\frac{4x}{3} - \frac{x^2}{3}) = \frac{\pi}{2}$;

1.3. $\operatorname{arctg} x = \operatorname{arcctg} 4x$;

1.4. $\operatorname{arctg}|x+9| = \operatorname{arctg}(12 + 4x)$;

1.5. $\arccos|7x+6| = \arccos(2x^2 - 3)$;

1.6. $\operatorname{arctg}\left|x + \frac{9}{x}\right| = \operatorname{arcctg}\frac{1}{|x+9|}$;

1.7. $\arcsin\frac{x}{2}+\arcsin(\frac{x}{3}-x^2)=0$; (тождество 3)

1.8. $\arccos\frac{4x}{5}+\arccos(\frac{x}{2}-x^2)=\pi$.(тождество 4)

4. Переход к уравнению-следствию.

Определение 2. *Уравнение* $F(x)=0$ *есть следствие уравнения* $f(x)=0$*:* $f(x)=0\Rightarrow F(x)=0$, *если каждый корень уравнения* $f(x)=0$ *является корнем уравнения* $F(x)=0$. *В частности, если уравнение* $F(x)=0$ *не имеет корней, то и уравнение* $f(x)=0$ *не имеет корней. Говорят, что множество корней уравнения* $f(x)=0$ *является подмножеством множества корней уравнения-следствия* $F(x)=0$.

Уравнение-следствие содержит все корни данного уравнения и ***посторонние корни****, которые следует удалить, например, простой* ***проверкой****.* ***Например,*** $f(x)=\varphi(x)\Rightarrow\sin(f(x))=\sin(\varphi(x))$

4.1. $\arcsin(1-x)-2\arcsin x=\frac{\pi}{2}$.

4.2. $\operatorname{arctg}(x-1)+\operatorname{arctg}x+\operatorname{arctg}(x+1)=0$;

4.3. $\arcsin\frac{1}{\sqrt{x}}-\arcsin\sqrt{1-x}=\frac{\pi}{2}$;

4.4. $\arccos\frac{x}{\sqrt{2}}+\arcsin x=\frac{\pi}{4}$;

4.5. $\sin(2\arccos x)=1$;

4.6. $\arcsin(3x+5)+\arccos(x+1)=\frac{\pi}{2}$;

4.7. $\arccos\frac{x-2}{2}=\operatorname{arcctg}\frac{x-2}{2}$;

4.8. $\arcsin 5x=\operatorname{arcctg}6x$.

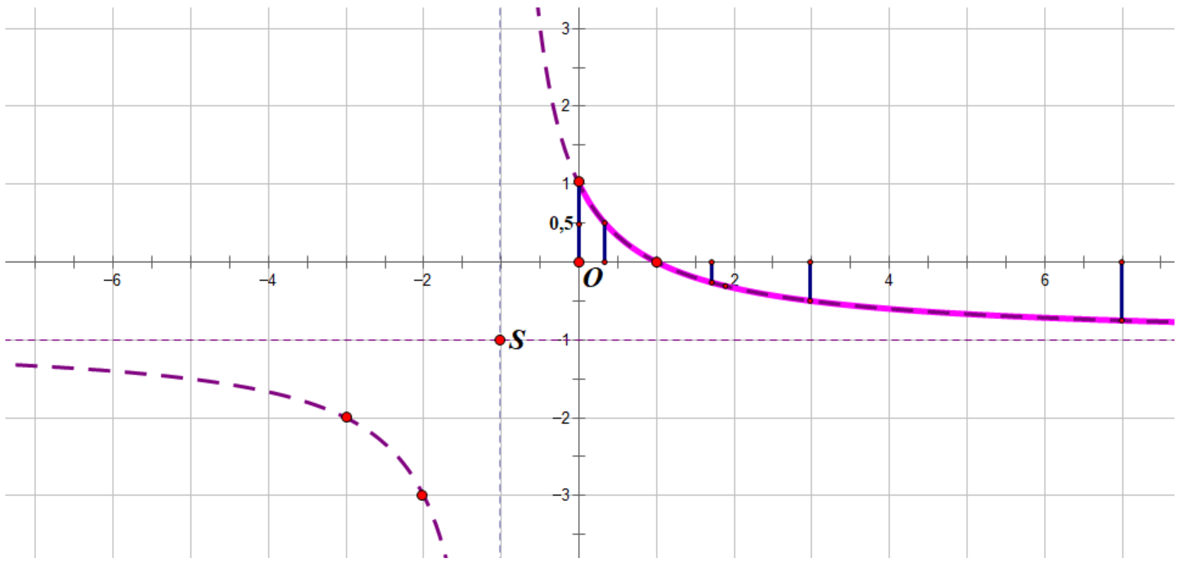
4.9. $\arcsin(2x+1)\le\arccos x$.

4.10. $\arcsin x>2\arccos 2x$.

5. Графики, которые нужно уметь строить, не применяя производных.

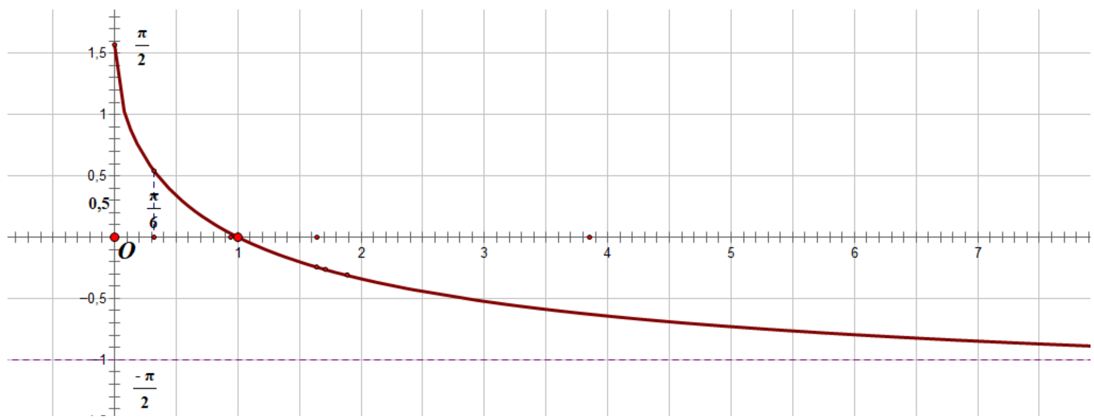
Построение графиков сложных функций можно вести с постепенном вычисление (примерным) значений сложной функции. Например, для построения графика функции $y=f(\varphi(x))$ *сначала строят график внутренней функции* $t=\varphi(x)$, *и по её значениям находят значения данной функции, отмечая характерные точки.*

Например, построим график $y=\arcsin\frac{1-x}{x+1}$. *Сначала пунктиром рисуем эскиз графика* $t=\frac{1-x}{x+1}$. *Этот график – гипербола с асимптотами* $x=-1;\ y=-1$. *Характерной точками являются* $S(-1;-1)$ *-центр гиперболы,* $(0;1), (1;0), (-2;-3), (-3;-2)$ *.Получаем*



Пунктирная линия – график $t=\frac{1-x}{x+1}$*; Выделенная часть графика – соответствует условию* $|t|=\left|\frac{1-x}{x+1}\right|\le 1$*. Теперь для выделенной части графика вычисляем значения* $y=\arcsin t$*, где числа t изображены на рисунке вертикальными отрезками графика* $y=\arcsin\frac{1-x}{x+1}$**.**

Например, для $t=1$ *значение* $y=\frac{\pi}{2}$*; для* $t=0{,}5$ *значение* $y=\frac{\pi}{6}$*; для* $t=0$ *значение* $y=0$*;для* $t=\to -1$ *значения* $y\to-\frac{\pi}{2}$*. В результате получаем*



1. $y=\arcsin\frac{1}{x}$;
2. $y=\arccos\frac{1-x}{x}$;
3. $y=\mathrm{arctg}(\mathrm{tg}\,x)$;
4. $y=\arccos\frac{1-x}{x-2}$;
5. $y=\mathrm{arctg}\frac{1}{|x|}$;
6. $y=\mathrm{arcctg}\frac{1-|x|}{|x|+1}$;
7. $y=\arccos\frac{4}{x^2+4}$