Аркусы и координаты на окружности

п.1. Координатная окружность и координаты точек на ней.

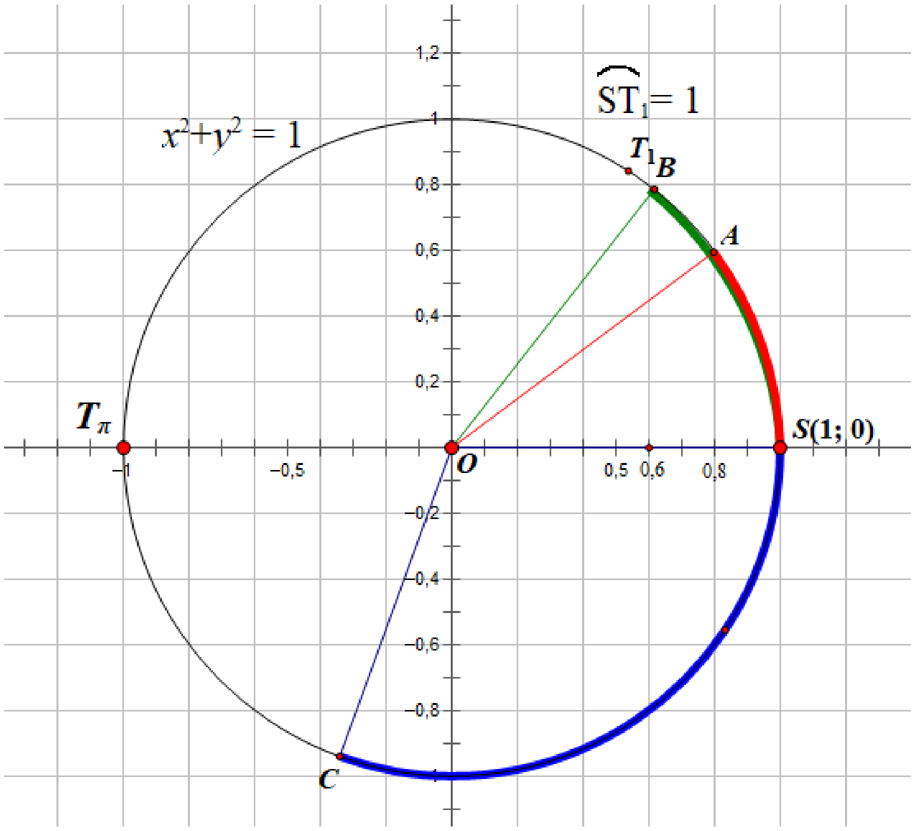

Рис. 1:

Аркусы — это дуги окружности, точнее их длины, взятые со знаком плюс или минус, в зависимости от обозначения (направления) дуги. Всегда

$$\overset{\smile}{AB} = -\overset{\smile}{BA}\ .$$

Зафиксируем на единичной окружности $x^2+y^2=1$ точку $S(1;0)$ —*начало*. Тогда единичная окружность $x^2+y^2=1$ становится *координатной окружностью* подобно тому, как прямая, после выбора начала и единицы масштаба, становится *координатной прямой.*

На координатной окружности положительное направление — направление против часовой стрелке, а по часовой — отрицательное. Так дуговые (угловые) координаты точек A, B, C равны длинам соответствующих дуг, взятым с соответствующим знаком: $\overset{\smile}{SA}>0, \overset{\smile}{SB}>0$, а $\overset{\smile}{SC}<0$, рис.1.

В этой модели каждой дуге (числу, равному длине дуги с выбранным знаком) соответствует единственная точка координатной окружности, но не наоборот. Каждой точке координатной окружности соответствует бесконечно много дуг. Как положительных, так и отрицательных.

Другими словами,

каждому числу $\alpha \in \mathbb{R}$ соответствует единственная точка T_α координатной окружности, а каждой точке M координатной окружности соответствует бесконечное множество чисел α_{M_k}, разность $\alpha_{M_i} - \alpha_{M_j}$, между любыми двумя из которых, кратна 2π.

Например,

• числу 0 соответствует единственная точка S, а точке S можно поставить в соответствие бесконечный набор чисел $0, 2\pi, -2\pi, 4\pi, -4\pi, \ldots$.

• числу 1 соответствует такая точка T_1, что длина дуги $ST_1 = 1$, а точке T_1 можно поставить в соответствие бесконечный набор чисел $1, 1 + 2\pi, 1 - 2\pi, 1 + 4\pi, 1 - 4\pi, \ldots$.

• числу π соответствует такая точка T_π, что длина дуги $ST_\pi = \pi$ (диаметрально противоположная точке S, а точке T_π можно поставить в соответствие бесконечный набор чисел $\pi, \pi + 2\pi, \pi - 2\pi, \pi + 4\pi, \pi - 4\pi, \ldots$.

Важное замечание.Подобное упражнение рекомендуется выполнить многократно и проверить, удалось ли ученикам освоить координатную окружность. Вспомните, что координатную прямую они изучали несколько лет. Понятие числового луча введено ещё в начальной школе.

Вместо дуг в школьном курсе часто используется углы. Это вполне допустимо, поскольку угол (центральный) содержит столько же градусов, минут и секунд, сколько градусов, минут и секунд содержит соответствующая ему дуга. Дуга измеряется углом, а угол дугой. Однако, в курсе тригонометрии предпочтительнее использовать дуги, а в геометрии - углы, как это было в древности.

п.2. Определение тригонометрических функций и соответствующих им аркусов.

Из определения основных тригонометрических функций следует, что каждой дуге (углу)α соответствует единственный синус этой дуги $\sin\alpha = y_\alpha$ — ордината конца дуги α координатной окружности.

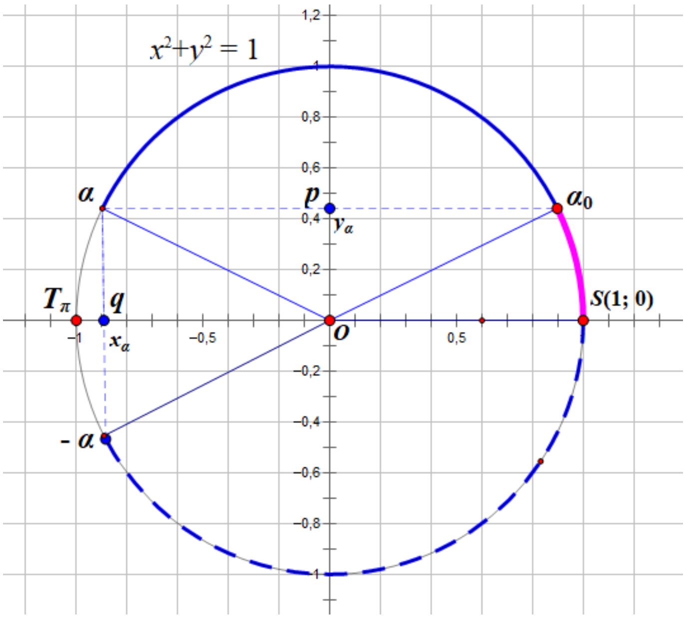

Рис. 2:

Наоборот, каждому значению $p \in [-1; 1]$ синуса, соответствует бесконечное множество дуг (углов). Среди этого бесконечного числа дуг есть только одна дуга α_0 — аркус, который в данном случае является арксинусом числа p:

$$\alpha_0 = \arcsin p \Leftrightarrow p = \sin\alpha_0 = \sin(\arcsin p).$$

Это число (дуга) $\alpha_0 \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Определение 1. Арксинусом числа p: $\arcsin p$ называется дуга α координатной окружности: $\arcsin p = \alpha$, обладающая двумя свойствами:

- число $\alpha \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} \leq \arcsin p \leq \frac{\pi}{2}$;
- $\sin\alpha = p \Leftrightarrow p = \sin\alpha = \sin(\arcsin p)$

Почти то же самое можно сказать и про арккосинус числа q.

Из определения основных тригонометрических функций следует, что каждой дуге (углу)α соответствует единственный косинус этой дуги $\cos\alpha = x_\alpha$ — абсцисса конца дуги α координатной окружности.

Наоборот, каждому значению $q \in [-1; 1]$ косинуса, соответствует бесконечное множество дуг (углов). Среди этого бесконечного числа дуг есть только одна дуга α — аркус, который в данном случае является арккосинусом числа q:

$$\alpha = \arccos q \Leftrightarrow q = \cos\alpha = \cos(\arccos q).$$

Это число (дуга) $\alpha \in [0; \pi]$.

Определение 2. Арккосинусом числа q: $\arccos q$ называется дуга α координатной окружности: $\arccos p = \alpha$, обладающая двумя свойствами:

- число $\alpha \in [0; \pi] \Leftrightarrow 0 \leq \arccos q \leq \pi$;
- $\cos\alpha = q \Leftrightarrow q = \cos\alpha = \cos(\arccos p)$.

Аналогично рассуждая можно понять следующие два определения.

Определение 3. Арктангенсом числа p: $\operatorname{arctg} p$ называется дуга α координатной окружности: $\operatorname{arctg} p = \alpha$, обладающая двумя свойствами:

- число $\alpha \in \left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right) \Leftrightarrow -\frac{\pi}{2} < \operatorname{arctg} p < \frac{\pi}{2}$;
- $\operatorname{tg}\alpha = p \Leftrightarrow p = \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\operatorname{arctg} p)$

Определение 4. Арккотангенсом числа p: $\operatorname{arcctg} p$ называется дуга α координатной окружности: $\operatorname{arcctg} p = \alpha$, обладающая двумя свойствами:

- число $\alpha \in [0; \pi] \Leftrightarrow 0 < \operatorname{arcctg} p < \pi$;
- $\cos\alpha = q \Leftrightarrow p = \operatorname{ctg}\alpha = \operatorname{ctg}(\operatorname{arcctg} p)$.

Важный вопрос: ***почему в последних определениях нестрогие неравенства заменили строгими?*** Ответ. Если сохранить нестрогие знаки неравенств, то второе условие не будет выполнено.

Например, если в определении 3 допустить значение $\operatorname{arctg} p = \frac{\pi}{2}$, то число p должно обладать свойством $p = \operatorname{tg}\frac{\pi}{2}$, но такое число не определено - его не существует!

Используя определения, можем построить графики обратных тригонометрических функций по точкам, используя известные значения.

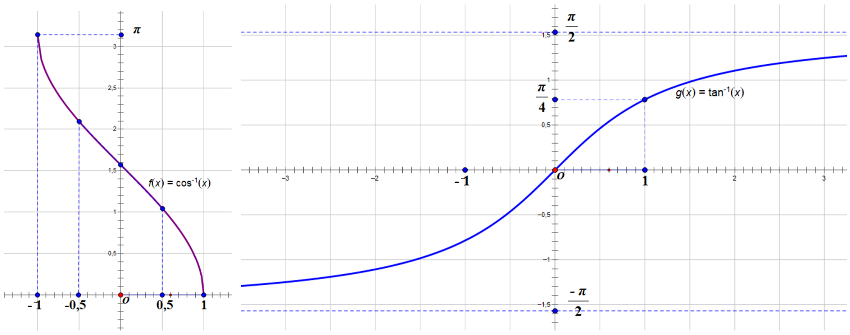

Рис. 3:

п.3. О графиках взаимно обратных функций $y = f(x)$ и $y = f^{-1}(x)$.

Этот материал требует дополнительного времени и обычно изучается в математических классах и классах проекта матвертикаль, если у последних не менее 9 часов в неделю. Можно рассматривать этот материал и на кружках, как это делают в школе №1520 в которой эти кружки веду я.

Основным здесь является понятие обратимой функции, если помнить, что функция - это соответствие между двумя множествами. Рассмотрим поясняющий пример.

Пусть функция f задаёт отображение $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ так, что

$$\forall x \in \mathbb{R} \to f(x) = 2x + 5.$$

Например,

$$x = 0 \in \mathbb{R} \to f(0) = 5.$$

$$x = 1 \in \mathbb{R} \to f(x) = 7.$$

$$x = -1 \in \mathbb{R} \to f(x) = 3.$$

$$x = 2 \in \mathbb{R} \to f(x) = 9.$$

$$x = -2 \in \mathbb{R} \to f(x) = 1.$$

....

Найдём обратное соответствие f^{-1} так, что узнавать из какого числа x возникло число y. Понятно, что нужно делать. Нужно обратить выше выписанную табличку.

$$y = 5 \in \mathbb{R} \to x = 0.$$

$$y = 7 \in \mathbb{R} \to x = 1.$$

$$y = 3 \in \mathbb{R} \to x = -1.$$

$$y = 9x = 2 \in \mathbb{R} \to x = 2.$$

$$y = 1 \in \mathbb{R} \to x = -2.$$

....

Несложно понять, что

$$\forall y \in \mathbb{R} \to x = \frac{y-5}{2}.$$

(Нужно решить уравнение $y = 2x + 5$ относительно x и получим $x = \dfrac{y-5}{2}$.)

Итак, чтобы найти функцию $y = f^{-1}(x)$, обратную данной $y = f(x)$, необходимо решить уравнение $y = f(x)$ относительно x. Получим $x = f^{-1}(y)$ и записать результат в виде $y = f^{-1}(x)$, поскольку дело на в буквах, в зависимости.

Отсюда следует, что во-первых, графики уравнений $x = f^{-1}(y)$ и $y = f(x)$, построенные на одной и той же координатной плоскости совпадают - их множества решений совпадают. Если же на на одной и той же координатной плоскости построить

графики уравнений $y = f^{-1}(x)$ и $y = f(x)$, то эти графики будут симметричны относительно прямой $y = x$, поскольку если пара $(x; y)$- решение уравнения $y = f(x)$, то пара $(y; x)$ - решение уравнения $x = f^{-1}(y)$ и наоборот.

Найдём функцию обратную функции $y = \sin x, x \in \mathbb{R}$. Понятно, что это уравнение имеет бесконечное множество решений и поэтому

функция $y = \sin x, x \in \mathbb{R}$ не имеет обратной.

Найдём функцию обратную функции $y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

В данном случае обратная функция существует, поскольку $\forall y \in [-1; 1], \exists! x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] :$ $x = \arcsin y$.

Следовательно, функция $y = \arcsin x$ — обратная функция для функции $y = \sin x, x \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

Найдём функцию, обратную функции $y = \sin x, x \in \left[\frac{3\pi}{2}; \frac{5\pi}{2}\right]$.

Очевидно, что обратной будет функция $y = 2\pi + \arcsin x$.

Убедитесь, что для функции

$$y = \begin{cases} x, & 0 \le x \le 1 \\ 3 - x, & 1 < x \le 2. \end{cases}$$

обратная будет совпадать с данной.

Полезно понять, что *непрерывная и монотонная функция на промежутке I имеет на этом промежутке обратную, которая также непрерывна и монотонна.*

Но, как показывает последний пример, это только *достаточное* условие.

Функция из последнего примера. который вы, конечно, решили (возможно графически) — разрывна и немонотонна на отрезке $[0; 2]$.