Вычисление углов.

Сначала вспомним определения.

Определение 1. Угол между двумя параллельными прямыми в пространстве равен нулю. Угол между двумя пересекающимися прямыми в пространстве равен наименьшему из углов, образовавшихся при их пересечении. Угол между двумя скрещивающимися прямыми в пространстве равен углу между пересекающимися прямыми, которые соответственно параллельны (или совпадают) с данными скрещивающимися прямыми.

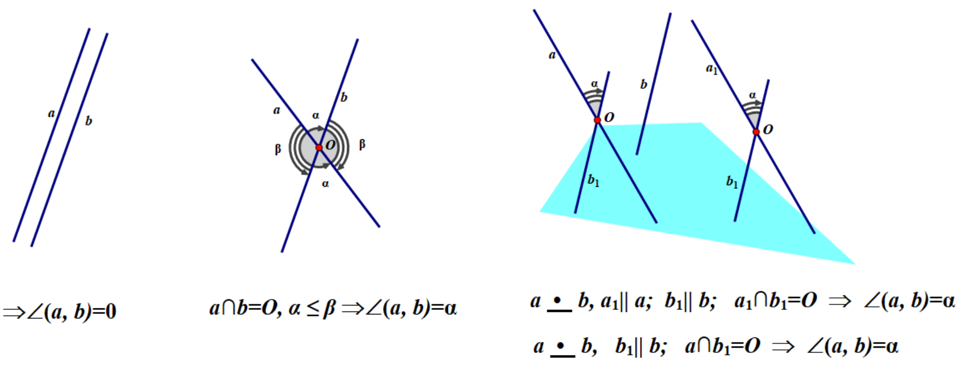

Рис. 1:

Определение 2. Углом между прямой и плоскостью называется угол между данной прямой и её ортогональной проекцией на эту плоскость.

Теорема. Угол между прямой и её ортогональной проекцией на данную плоскость не больше угла между данной прямой и любой прямой, лежащей в этой плоскости.

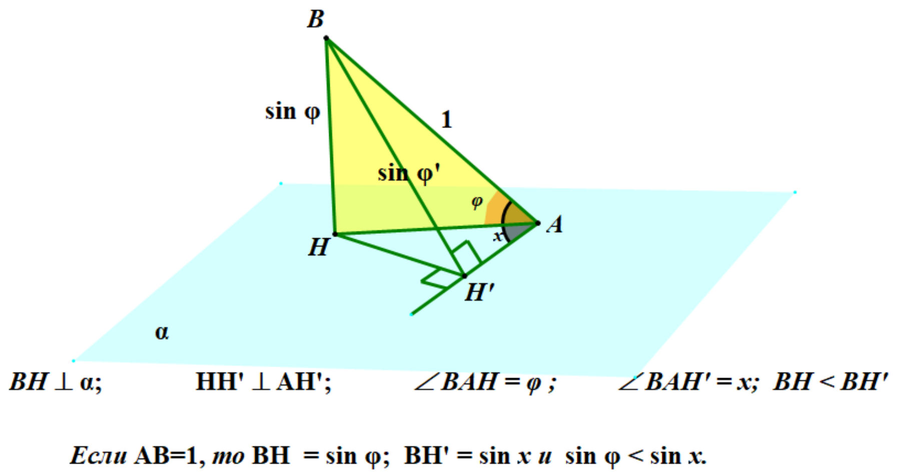

Рис. 2:

Определение 3. Пусть плоскости α и β пересекаются по прямой m и плоскость γ перпендикулярна прямой m. Тогда угол, между прямыми, по которым плоскость γ пересекает плоскости α и β, называется *линейным углом между плоскостями* α и β. Величина этого угла равна углу между плоскостями α и β.

Если плоскости параллельны, то угол между ними равен 0.

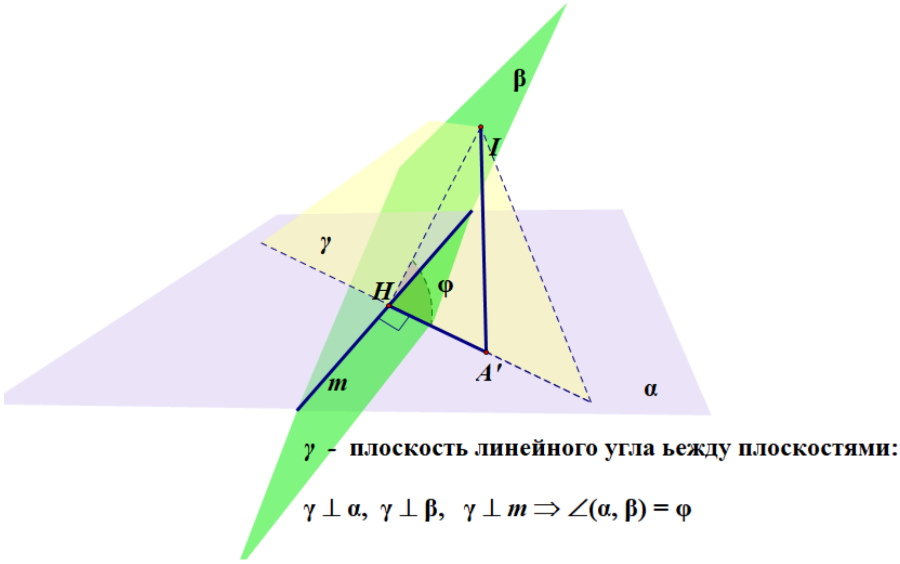

Рис. 3:

Задача 1.1. Найти углы между

а) диагоналями куба.

б) диагональю куба и диагональю его грани.

в) диагоналями соседних граней куба.

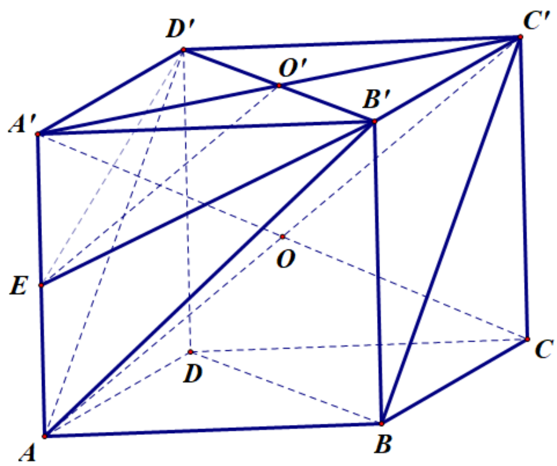

Рис. 4:

Решение.

а) Все диагонали куба равны между собой и имеют общую середину. Поэтому угол φ между ними равен углу между диагоналями прямоугольника – диагонального сечения куба. Рассмотрим прямоугольник $ACC'A'$, диагонали которого пересекаются в точке O. Тогда по свойству внешнего угла равнобедренного треугольника $A'OC'$, для которого $\angle COC' = \varphi$, имеем

$$\varphi = 2\angle AC'A' = 2\operatorname{arctg}\frac{AA'}{A'C'} = 2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Ответ: $2\operatorname{arctg}\frac{1}{\sqrt{2}}$.

б) Выберем диагональ AC' куба и диагональ $B'D'$ его грани $A'B'C'D'$. Пусть $\angle(AC', B'D') = \theta$.

На лекции я рассматривал способ вычисления этого угла с помощью дополнительного построения. Здесь — другой способ, тоже удобный.

Итак, пусть отрезок EO' — средняя линия треугольника $AA'C'$, параллельная AC'. Тогда искомый угол θ есть угол $B'O'E$ или ему смежный.

Но $\triangle B'D'E$ — равнобедренный: $B'E = ED'$ в силу равенства: $\triangle EA'B' = \triangle EA'D'$ по двум катетам: $A'B' = A'D'; EA'$ — общий катет. Отсюда следует, что медиана EO' — высота треугольника $B'D'E$ и, значит, $EO' \perp B'D'$, откуда следует, что $\theta = 90°$.

Ответ: $90°$.

в) Выберем диагонали AB' и BC' граней данного куба.

Заметим, что $AD' || BC'$ и поэтому искомый угол

$$\delta = \angle(AB', BC') = \angle D'AB' = 60°,$$

поскольку является углом равностороннего треугольника $AB'D'$.

Ответ: $60°$.

Задача 1.2. Найти углы между

г) диагональными плоскостями куба.

д) диагональю грани куба и его диагональной плоскостью.

е) диагоналями граней правильной призмы с равными рёбрами.

ж) «Диагональной» плоскостью правильной треугольной призмы и диагональю её грани.

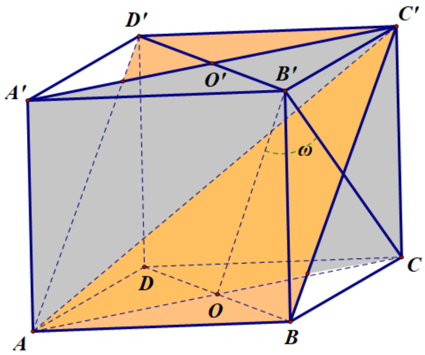

Рис. 5:

Решение.

г) Рассмотрим диагональные плоскости (ABC') и $(AA'C')$ куба $ABCDA'B'C'D'$. Пусть $\varphi = \angle\left((ABC'),(AA'C')\right)$. Построение сторон линейного угла этих плоскостей не очень просто, поскольку требуется построить перпендикуляры к линии AC' их пересечения, лежащие в данных плоскостях. (Постройте эти линии.)

Однако понятно, что угол между плоскостями равен углу между перпендикулярами к этим плоскостям, то есть между прямыми CB' и $B'D'$. Отметим в решении (это обязательно!), что

$$(CB' \perp AB; CB' \perp BC') \Rightarrow (CB' \perp (ABC'))\,,$$

и аналогично

$$(B'D' \perp A'C'; B'D' \perp AA') \Rightarrow (B'D' \perp (AA'C'))\,.$$

Угол между прямыми CB' и $B'D'$ мы вычислили ранее и он равен $60°$.

Поэтому $\varphi = \angle\left((ABC'),(AA'C')\right) = \angle\left(CB', B'D'\right) = 60°$.

Ответ: $60°$.

д) Рассмотрим диагональ $B'C$ данного куба и диагональную плоскость (ABC').

Ранее мы выяснили, что $CB' \perp (ABC')$ и поэтому $\angle\left(B'C,(ABC')\right) = 90°$.

Ответ: $90°$.

Теперь вычислим угол ω между прямой $B'C$ и диагональной плоскостью $(BB'D')$ (рис.5.).

Поскольку B' — точка их пересечения, а $CO \perp (BB'D')$ по доказанному ранее (посмотрите, где этот факт доказан!), то

$$\omega = OB'C.$$

Заметим, что треугольник $OB'C$ — прямоугольный, так как $B'O \perp AC$ по теореме о трёх перпендикулярах: $BB' \perp (ABC), OB = \text{пр}^{\perp}_{(ABC)} B'O$.

Следовательно, $\sin\omega = \frac{OC}{CB'} = \frac{1}{2}$. Отсюда в силу того, что искомый угол ω — острый, находим $\omega = 30°$. **Ответ:** $30°$.

е) Рассмотрим диагонали $A'B$ и $B'C$ граней правильной призмы $ABCA'B'C'$ с равными рёбрами и вычислим угол $\alpha = \angle(A'B, B'C)$.

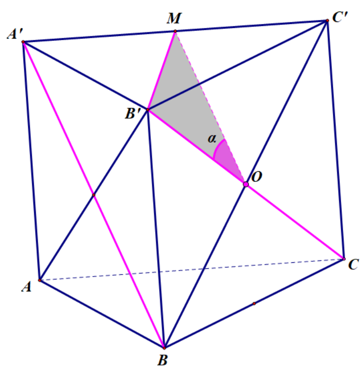

Рис. 6:

Построение и вычисление этого угла всегда вызывает затруднения у учеников и поэтому многократное решение этой задачи для различных правильных призм принято считать обязательным. Это важные опорные задачи!

Выберем точку на одной диагонали и через неё и вторую данную диагональ проводим плоскость - это стандартный ход.

В нашем случае рассмотрим середину O диагонали $B'C$ и прямую $A'B$. Они определяют плоскость $(A'BC') = \pi$, содержащую точку O и прямую $A'B$. Отрезок $OM||A'B$, где M — середина $A'C'$ по свойству средней линии треугольника $A'BC'$.

Отсюда следует, что искомый угол

$$\alpha = \angle(A'B, B'C) = \angle MOB'.$$

Пусть ребро призмы равно a. Тогда $B'O = MO = \frac{a}{\sqrt{2}}$; $B'O = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Теперь из треугольника $B'OM$ по теореме косинусов находим

$$\cos\alpha = \frac{B'O^2 + MO^2 - B'M^2}{2B'O \cdot MO} = \frac{\frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} - \frac{3a^2}{4}}{2\frac{a^2}{2}} = \frac{1}{4} > 0.$$

Отсюда окончательно находим $\alpha = \arccos 0,25$.

Ответ: $\arccos 0,25$.

Приведу ещё построения в правильной шестиугольной призме $ABCDEFA_1B_1C_1D_1E_1F_1$, (рис.7), все рёбра которой равны по 1.

Сначала рассмотрим две плоскости: $\alpha = (BD_1F)$ и $\beta = (AA_1E)$. Найдём угол θ между этими плоскостями.

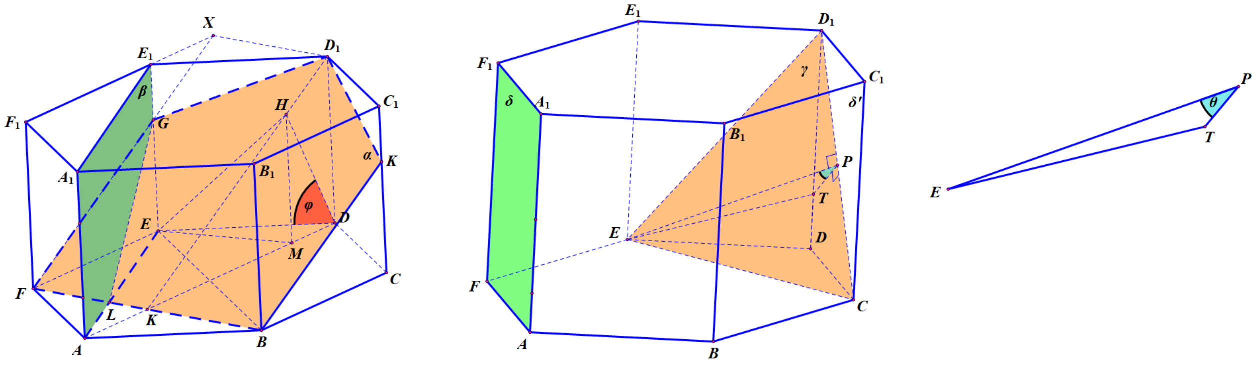

Рис. 7:

Заметим, что построение линейного угла к линии GL, где $G \in EE', L \in BF$ и $E'G : GE = 1 : 2, FL : LB = AL : LE = 1 : 2$ (докажите!) пересечения плоскостей α и β в данном случае затруднено. Поэтому воспользуемся *методом нормалей:*

угол между плоскостями равен углу между прямыми соответственно перпендикулярными данным плоскостям, которые называют нормалями этих плоскостей.

Нормаль плоскости β параллельна прямой FC. Выберем прямую $DE||FC$.

Нормаль плоскости α параллельна высоте DH треугольника DD_1K, где K — точка пересечения плоскости α с прямой BF и является серединой отрезка BF, поскольку плоскость $(KDD_1)\perp\alpha$, а перпендикуляр к данной плоскости всегда лежит в плоскости, перпендикулярной данной.

Итак, искомый угол $\varphi = \angle HDE$.

Пусть ребро данной призмы равно 1. (Дальнейшие вычисления требуют особого внимания и поэтому задачи такого уровня рекомендую решать в 11-м классе, когда ученики имеют повышенную мотивацию.)

Тогда в треугольнике HDE имеем

$$ED = 1, DH = \frac{D_1D \cdot DK}{\sqrt{D_1D^2 + KD^2}} = \frac{3}{\sqrt{13}}, HE^2 = MH^2 + ME^2,$$

где точка M — проекция точки H на плоскость (ABC). Поэтому точка M будет лежать на линии AD пересечения плоскостей (ABC) и (ADD_1), поскольку $(ABC)\perp(ADD_1)$.

Далее в треугольнике D_1DK с катетами $KD = \dfrac{3}{2}, D_1D = 1$ вычисляем $HM = \dfrac{9}{13}$ и в треугольнике DEM вычисляем по теореме косинусов

$$EM^2 = ED^2 + DM^2 - ED \cdot DM = \frac{127}{169}.$$

Теперь вычисляем $HE^2 = MH^2 + ME^2 = \dfrac{9^2}{13^2} + \dfrac{127}{169} = \dfrac{208}{169} = \dfrac{16}{13}$.

Окончательно, опять по теореме косинусов в треугольнике EDH вычисляем

$$\cos\varphi = \frac{\frac{9}{13} + 1 - \frac{16}{13}}{2 \cdot 1 \cdot \frac{3}{\sqrt{13}}} = \frac{1}{\sqrt{13}}.$$

Ответ: $\arccos\dfrac{1}{\sqrt{13}}$.

Рассмотрим теперь две другие плоскости: $\gamma = (D_1EC)$ и $\delta = (AA_1F)$. Найдём угол φ между ними (рис.7), считая, что отношение ребра основания к боковому ребру этой правильной призмы равно $1 : \sqrt{2}$.

Пусть ребро основание призмы равно 1, тогда её боковое ребро равно $\sqrt{2}$. Отметим, что в этом случае треугольник D_1EC правильный и его сторона равна $\sqrt{3}$.

Поскольку линия пересечения плоскостей γ и δ лежит вне призмы, рассмотрим плоскость $(CC_1D) = \delta' || \delta$. Тогда

$$\varphi = \angle(\gamma, \delta) = \angle(\gamma, \delta').$$

Линией пересечения плоскостей γ и δ' является прямая CD_1.

Сечение данной призмы плоскостью γ является треугольник CED_1, в котором $CE = ED_1 = CD_1 = \sqrt{3}$. Поэтому его высота EP — одна из сторон линейного угла между плоскостями α и δ'. Вторая сторона этого линейного угла — прямая $PT\perp CD_1$, где точка $T \in DD_1$.

Следовательно искомый угол $\theta = \angle EPT$.

В треугольнике EPT имеем $EP = \dfrac{EC\sqrt{3}}{2} = \dfrac{3}{2}$.
Отрезок PT находим из подобия $\triangle PD_1T \sim \triangle DD_1C$:

$$\frac{PT}{CD} = \frac{PD_1}{DD_1} \Rightarrow PT = CD \cdot \frac{PD_1}{DD_1} = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}.$$

Потребуется отрезок $DT = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ (проверьте!). Теперь по теореме Пифагора

$$ET = \sqrt{ED^2 + DT^2} = \sqrt{1 + \frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{11}{8}}$$

Наконец окончательно по теореме косинусов в треугольнике EPT получаем

$$\cos\theta = \frac{EP^2 + PT^2 - ET^2}{2EP \cdot PT} = \frac{\frac{9}{4} + \frac{3}{8} - \frac{11}{8}}{2 \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}} = \frac{5}{6}\sqrt{\frac{2}{3}}.$$

Ответ: $\arccos\left(\dfrac{5}{6}\sqrt{\dfrac{2}{3}}\right)$.

Задача 1.3. Найти косинус двугранного угла при основании правильной треугольной пирамиды, если (a) отношение ребра её основания к длине высоты равно 3; (b) все рёбра равны по 1.

Эта важная и простая задача. И я всегда рекомендую одиннацатиклассникам запомнить и способы её решения, и результат (рис.8.).

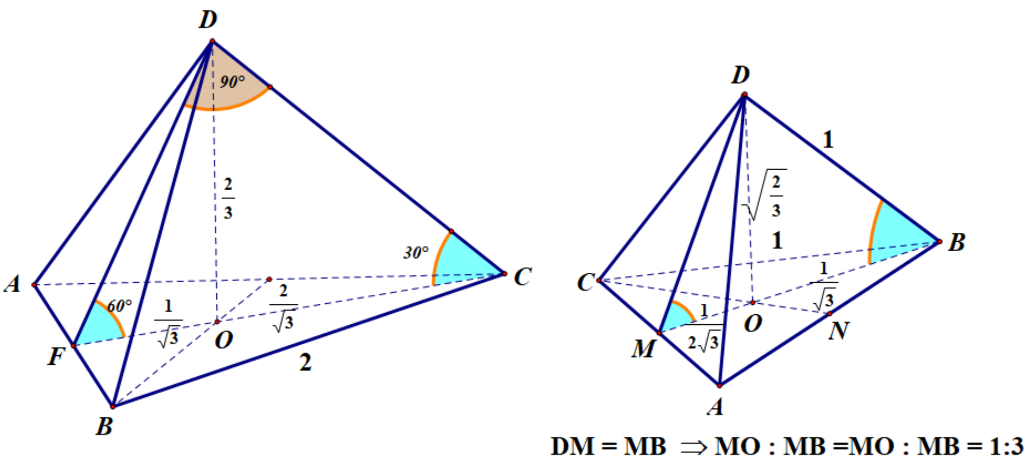

Рис. 8:

В заключение рассмотрим решение задач ДВИ по стереометрии (математики и биологи).

Задача 1.4. В основании прямой призмы $ABCDA_1B_1C_1D_1$ лежит параллелограмм $ABCD$.

На рёбрах A_1B_1, B_1C_1, BC лежат точки M, N, K соответственно, причём

$B_1K : KC_1 = 2 : 3$ и четырёхугольник $AMKN$ — равнобокая трапеция с основаниями 4 и 5.

1) Докажите, что точка N середина ребра.

2) Найдите площадь трапеции $AMKN$, если объём призмы равен 20, а высота призмы равна 2.

Решение. Рекомендую сначала решить задачу самостоятельно, а потом посмотреть решение.

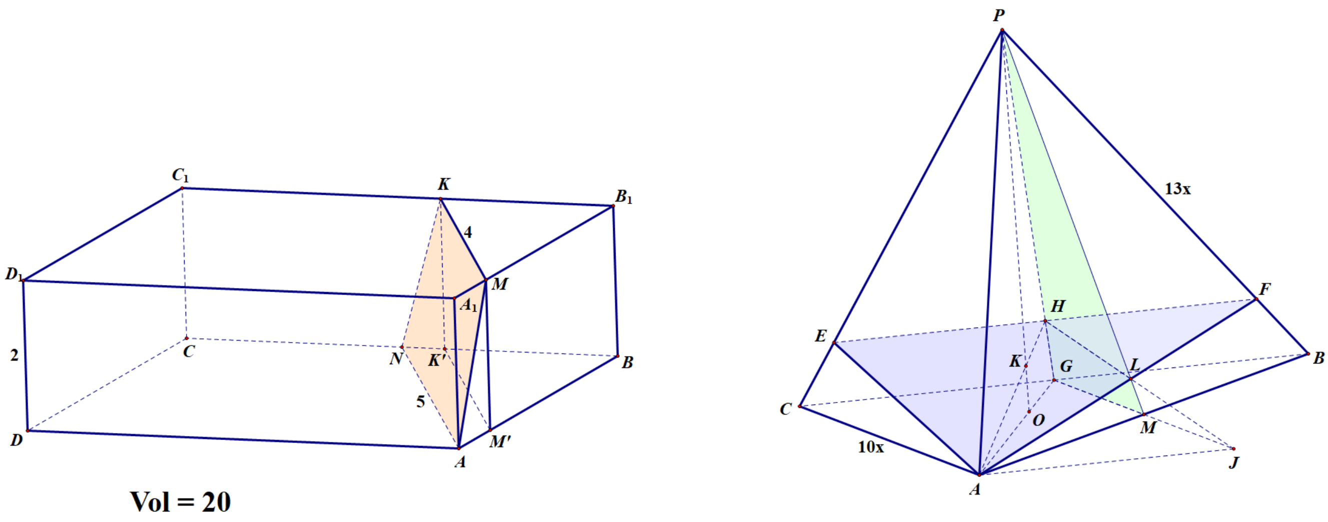

Рис. 9:

Пусть точки K', M' ортогональные проекции точек K, M соответственно на плоскость (ABC), тогда $BK' : K'C = 2 : 3$ по условию и по свойству ортогонального проектирования. Отсюда следует, что $BK' = 2x; K'N = y; NC = 3x - y$ и в силу подобия $\triangle BK'M' \sim \triangle BNA$ с коэффициентом подобия $k = \frac{4}{5}$, поскольку по условию в трапеции $AMKN$ основания $MK = 4, AN = 5$ и при ортогональном проектировании отрезок параллельной плоскости проекций проектируется в натуральную величину.

Отсюда получаем пропорцию

$$\frac{2x}{2x+y} = \frac{4}{5} \Leftrightarrow 2x = 4y \Rightarrow 3x - y = 5y.$$

Следовательно, $BN = 5y; CN = 5y$, что означает, что точка N — середина ребра, ч.т.д.

Вычислим теперь площадь сечения — площадь трапеции $AMKN$.

Заметим, что из условия следует, что площадь S параллелограмма $ABCD$ равна $S = \dfrac{20}{2} = 10$, поскольку объём V прямой призмы равен $V = 2S = 20$.

Доказано, что точка N — середина ребра BC. Отсюда следует по свойствам площадей, что площадь треугольника BNA равна 2,5. В самом деле, Этот треугольник имеет высоту H, равную высоте параллелограмма $ABCD$ из вершины A и вдвое меньшее основание, поскольку по доказанному $BN = 0,5BC$. Отсюда и следует, что

$$S_{BNA} = 0,5 \cdot BN \cdot H = 0,5 \cdot 0,5BC \cdot H = 0,25 \cdot (BC \cdot H) = 0,25 \cdot 10 = 2,5.$$

Следовательно, площадь подобного ему треугольника $BM'K'$ равна

$$S_{BM'K'} = k^2 \cdot S_{BNA} = \frac{16}{25} \cdot 2,5 = \frac{8}{5}.$$

Значит, площадь $S_{AM'K'N}$ трапеции $AM'K'N$ равна разности $\frac{5}{2} - \frac{8}{5} = 0,9$.

Отсюда следует, что высота h трапеции $AM'K'N$ равна

$$h = \frac{2S_{AM'K'N}}{AN + M'K'} = \frac{2 \cdot 0,9}{5+4} = 0,2.$$

Заметим, что $\dfrac{MM'}{h} = \operatorname{tg}\alpha$, где α — угол между плоскостью сечения $AM'K'N$ и плоскостью основания $ABCD$ параллелепипеда. То есть

$$\operatorname{tg}\alpha = \frac{2}{0,2} = 10 \Leftrightarrow \cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{101}}.$$

Отсюда по формуле площади проекции окончательно находим

$$S_{AMKN} = \frac{S_{AM'K'N}}{\cos\alpha} = \frac{0,9}{\dfrac{1}{\sqrt{101}}} = 0,9\sqrt{101}.$$

Ответ: $0,9\sqrt{101}$.

Задача 1.5. Основанием правильной треугольной пирамиды $PABC$ является треугольник ABC, причём отношение $AP : AB = 13 : 10$. Плоскость α проходит перпендикулярно апофеме грани BCP и содержит точку A.

1) Докажите, что плоскость α делит апофему грани BCP в отношении $119 : 25$, считая от точки P.

2) Найдите угол между прямой AC и плоскостью α.

Решение. Пусть апофема грани PBC — отрезок PG. Тогда точка G — середина BC.

Заметим, что в правильной треугольной пирамиде $PABC$ плоскость APG перпендикулярна плоскости (PBC) боковой грани, поскольку в этой грани есть такой отрезок BC, что $BC \perp AG, BC \perp PO$, где PO — высота пирамиды $PABC$. Отсюда следует, что высота AH треугольника APG — высота данной пирамиды из вершины A, то есть $AH \perp (PBC)$ и, значит, плоскость α содержит прямую AH.

Поэтому прямая EF, проходящая через точку H параллельно BC, перпендикулярна PG и, следовательно, также лежит в плоскости α.

Итак, плоскость α определена двумя пересекающимися прямыми AH и EF.

По условию $AP : AB = 13 : 10$. Примем $AB = BC = CA = 10t$, тогда $PF = PB = PC = 13t$ и апофема $PG = 12t$ по теореме Пифагора.

Теперь из подобия $\triangle AHG \sim \triangle POG$ находим

$$\frac{HG}{OG} = \frac{AG}{PG} \Rightarrow \frac{HG}{\frac{5t}{\sqrt{3}}} = \frac{5t\sqrt{3}}{12t} \Rightarrow HG = \frac{25}{12}t \Rightarrow PH = PG - HG = 12t - \frac{25}{12}t = \frac{119}{12}t.$$

Следовательно, отношение, в котором плоскость α делит апофему грани BCP, равно

$$\frac{PG}{GH} = \frac{\frac{119}{12}t}{\frac{25}{12}t} = 119 : 25,$$

что и требовалось доказать.

Чтобы найти угол между прямой AC и плоскостью α, достаточно найти угол между прямой AC и нормалью к плоскости α, то есть между прямой AC и прямой PG, которая перпендикулярна плоскости α по условию. Это объясняется тем, что этот и искомый угол дополняют друг друга до $90°$.

Итак, найдём угол $\varphi = \angle(PG, GM) = \angle PGM$, где точка M — середина AB и поэтому $AC||GM$ по свойству средней линии.

В треугольнике PGM имеем $PG = PM = 12, GM = 0,5AC = 5$. Поэтому

$$\angle PGM = \frac{0,5GM}{PG} = \frac{5}{24}$$

Значит, если обозначить искомый угол θ, получаем

$$\sin\theta = \cos\varphi = \frac{5}{24} \Rightarrow \theta = \arcsin\frac{5}{24}.$$

Ответ: $\arcsin\frac{5}{24}$.