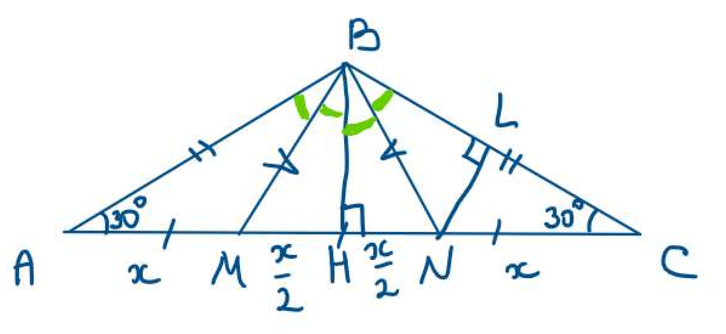
Задача 1. На стороне AC равнобедренного треугольника ABC с $\angle B = 120^\circ$ взяты точки M и N так, что $AM = MN = NC$. Докажите, что треугольник BMN равносторонний.



1) $\triangle ABM = \triangle CBN$ по двум сторонам и углу между ними

$\Rightarrow BM = BN$

$\triangle BMN$ – р/б

2) Проведём BH. $MH = HN = \frac{x}{2}$, $AM = NC = x$

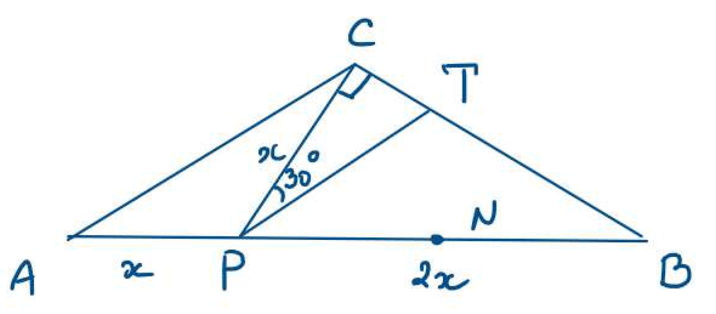
3) Проведем $NL \perp BC$. $\triangle CNL$ – прям. с углом 30°.

$\Rightarrow NL = \frac{x}{2}$

4) $\triangle BNL = \triangle BNH$ по катету и гипотенузе

$\Rightarrow \angle LBN = \angle NBH = \frac{1}{4} \cdot 120^\circ = 30^\circ \Rightarrow \angle MBN = 60^\circ \Rightarrow \triangle BMN$ – р/с

Задача 2. Дан равнобедренный треугольник ABC, $\angle ACB = 120^\circ$. На стороне AB отмечена такая точка P, что $BP = 2\,AP$. На стороне CB отмечена такая точка T, что $\angle CPT = 30^\circ$. Докажите, что $BT = 2\,CT$.



1) $\angle PCB = 90^\circ$ (см. задачу 1)

$CP = x$, $\angle TPB = 30^\circ$

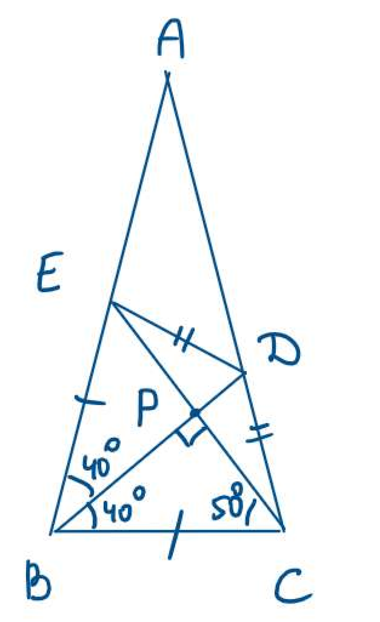
2) $\triangle CPT$ – прям. с углом 30°

$CT = \frac{1}{2} PT$

3) $\angle TPB = 30^\circ = \angle TBP \Rightarrow BT = PT$

$\Rightarrow CT = \frac{1}{2} PT = \frac{1}{2} BT$ $\quad BT = 2CT$

Задача 3. В равнобедренном треугольнике ABC с основанием BC угол A равен 20°. На стороне AC взята такая точка D, что $\angle CBD = 40^\circ$, на стороне AB такая точка E, что $\angle BCE = 50^\circ$. Найдите угол CED.



1) $\angle A = 20^\circ \Rightarrow \angle B = \angle C = 80^\circ$

2) $\angle BPC = 90^\circ$

$\triangle EBC$: BP – бис. и высота

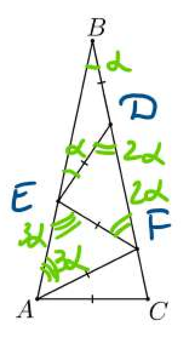
$\Rightarrow \triangle EBC$ – р/б $BE = BC$, $EP = PC$

3) DP – высота и медиана в $\triangle EDC$

$ED = DC$ (через $\triangle BED = \triangle BCD$)

4) $\angle ECD = 30^\circ = \angle CED$.

Задача 4. Равнобедренный треугольник ABC с основанием AC разделили на четыре равнобедренных треугольника (см. рисунок). Найдите углы треугольника.



$\angle EDF = 2\alpha$

$\angle AEF$ - внешний для $\triangle BEF$, $\angle AEF = 3\alpha$

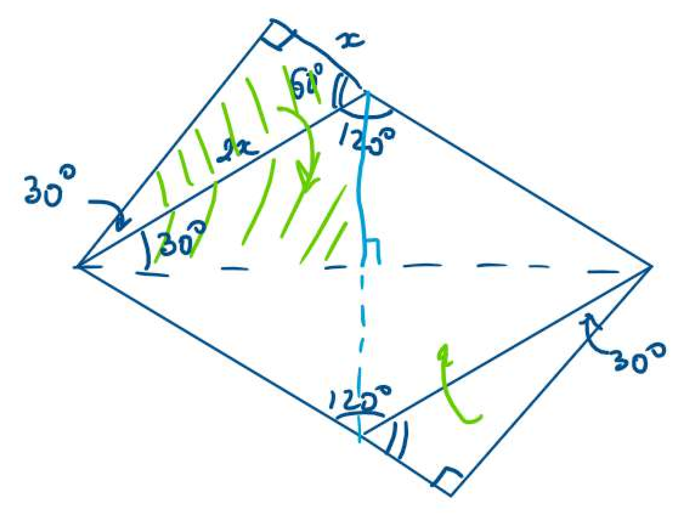
$\angle AFC$ - внешний для $\triangle ABF$; $\angle AFC = 4\alpha = \angle ACF = \angle CAB$

$4\alpha + 4\alpha + \alpha = 180^\circ$

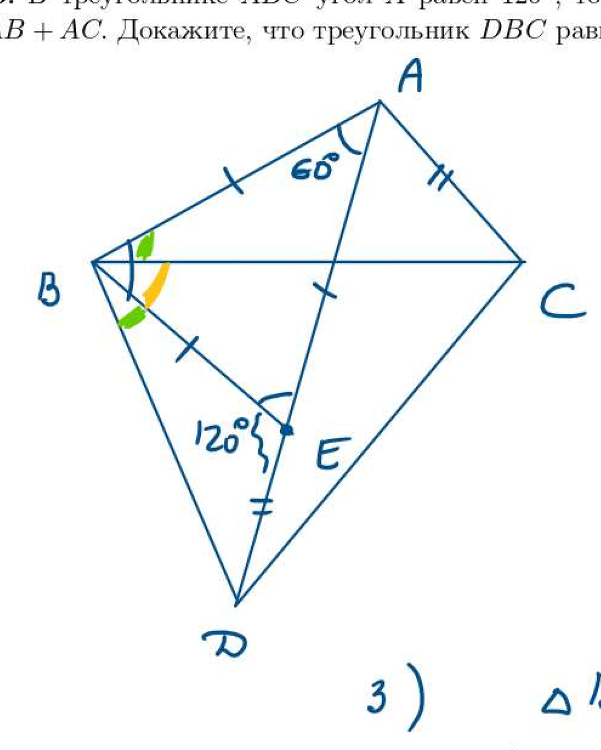
$9\alpha = 180^\circ$

$\alpha = 20^\circ$

Задача 5. Равнобедренный треугольник с углом 120° сложен ровно из трёх слоёв бумаги. Треугольник развернули и получился прямоугольник. Нарисуйте такой прямоугольник и покажите пунктиром линии сгиба.



Задача 6. В треугольнике ABC угол A равен 120°, точка D лежит на биссектрисе угла A и $AD = AB + AC$. Докажите, что треугольник DBC равносторонний.



$AD = AB + AC$

1) Отметим на AD точку E: $AE = AB$

Тогда $ED = AC$

2) $\triangle ABE$ – р/б с углом $\angle BAE = \frac{1}{2} \cdot 120^\circ = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle ABE$ – р/с

3) $\triangle BAC = \triangle BED$ по 2 сторонам и углу между ними

$\angle BED = 120^\circ = \angle BAC$

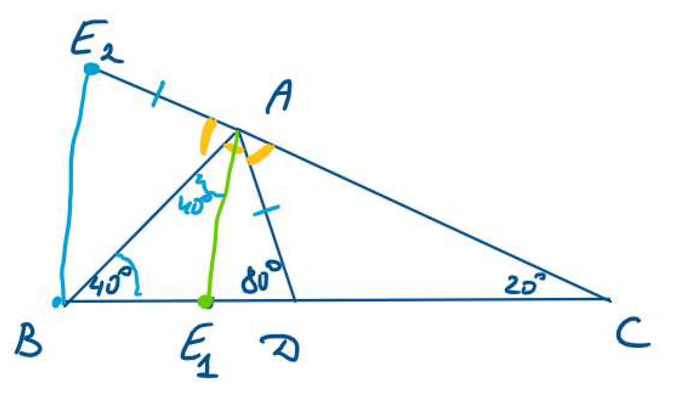
$AB = BE$

$AC = EC$

$\Rightarrow BD = BC$

4) $\angle CBD = 60^\circ \Rightarrow \triangle DBC$ – р/с

Задача 7. В треугольнике ABC $\angle A = 120^\circ$, $\angle B = 40^\circ$, AD — биссектриса. Докажите, что $BC = AC + AD$.



I вариант На AC за т. A берем E_2 $AE_2 = AD$

II вариант На BC берем E_1: $CE_1 = CA$

I. $\triangle ABD$ $\angle BAD = 60^\circ \Rightarrow \angle BDA = 80^\circ$

$\triangle BE_2A = \triangle BDA$ по 1 пр. $\Rightarrow \angle E_2 = 80^\circ \Rightarrow \angle E_2BC = 80^\circ$

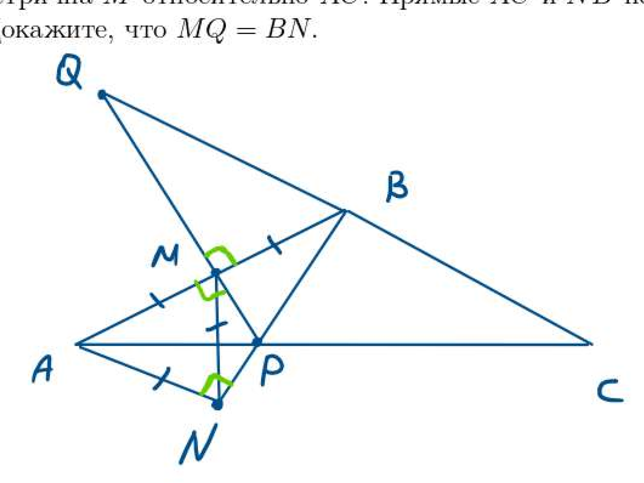
$\triangle BE_2C$ – р/б $\Rightarrow BC = CE_2 = AC + AD$.

II. $AC = CE_1$, $\triangle ACE_1$ – р/б $\angle C = 20^\circ \Rightarrow \angle CAE_1 = \angle AE_1C = 80^\circ$

$\angle BAE_1 = 40^\circ \Rightarrow BE_1 = AE_1$

$\angle AE_1D = 80^\circ \Rightarrow \triangle AE_1D$ – р/б $\Rightarrow AE_1 = AD = BE_1$

Задача 8. Треугольник ABC — равнобедренный с основанием AC и $\angle B = 120^\circ$. Точка M — середина AB. Точка N симметрична M относительно AC. Прямые AC и NB пересекаются в точке P, а прямые PM и BC — в точке Q. Докажите, что $MQ = BN$.



1) $\triangle MAN$ – р/с $\quad AM = AN$, $\angle MAN = 2 \cdot \angle MAC = 60^\circ$

$\Rightarrow AM = AN = MN$

2) $\triangle NAB$ – прям. $\angle ANB = 90^\circ$

3) $\angle AMP = \angle ANP = 90^\circ$

4) $\triangle BNA$ и $\triangle MQB$

$\angle BNA = \angle BMQ = 90^\circ$

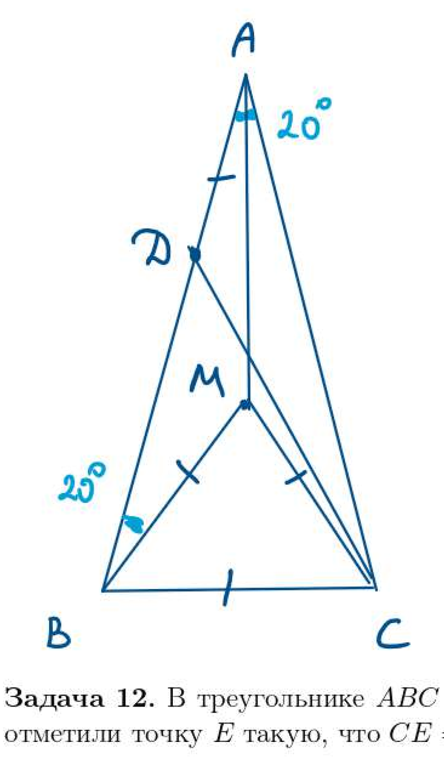
$AN = BM$

$\angle NAB = \angle MBQ = 60^\circ$

$\Rightarrow \triangle BNA = \triangle MQB$

$\Rightarrow MQ = BN$

Задача 11. Угол при вершине A равнобедренного треугольника ABC ($AB = AC$) равен 20°. На стороне AB взята такая точка D, что $AD = BC$. Найдите угол BCD.



1) Построим р/с $\triangle BCM$

2) AM - бис.

3) $\triangle AMB = \triangle ADC$ по 1 признаку

$\angle ABM = \angle DAC = 20^\circ$

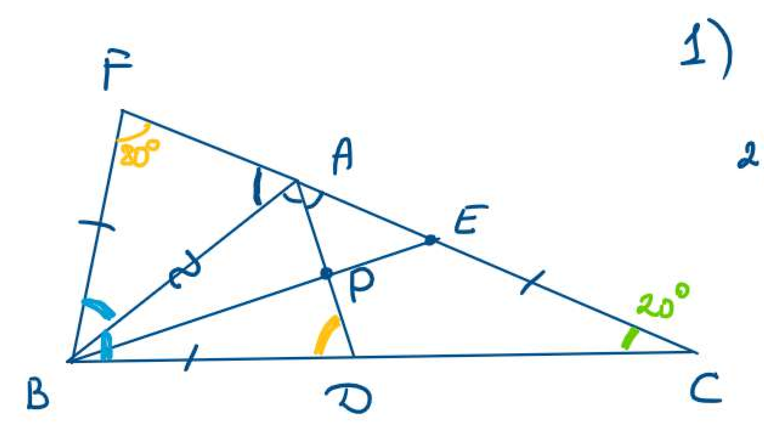
$BM = AD$

$AB = AC$

$\Rightarrow \angle ACD = \angle BAM = \frac{1}{2} \cdot 20^\circ = 10^\circ$

$\Rightarrow \angle BCD = 80^\circ - 10^\circ = 70^\circ$.

Задача 12. В треугольнике ABC известно, что $\angle A = 120^\circ$, $\angle B = 40^\circ$ и AD — биссектриса. На стороне AC отметили точку E такую, что $CE = BD$. Докажите, что $AD \perp BE$.



1) На AC за т. A отметим F $\angle BFC = \angle FBC = 80^\circ$

2) $\triangle ABF = \triangle ABD \Rightarrow BF = BD$

3) $\triangle BFC$ с углами 20°-80°-80°

$BF = EC \Rightarrow$

по задаче 11 : $\angle CBE = 10^\circ$

4) $\triangle ABD$ $\angle ABD = 40^\circ$ $\angle BAD = 60^\circ \Rightarrow \angle BDA = 80^\circ$

$\Rightarrow \angle BPD = 180^\circ - (\angle CBE + \angle PDB) = 180^\circ - (10^\circ + 80^\circ) = 90^\circ$

$\Rightarrow AD \perp BE$.